Chapitre 13-A. Fonctions : limites, continuité

Maths SUP

***OPTIMAL** SUP-SPE*

Fiche de cours

Dans tout le cours, sauf précision contraire, les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

I. Limite en un point

1. Limite finie ou infinie en un point de $\mathbb{R}$

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $x_0 \in I$, f une fonction définie sur I (sauf peut-être en x_0) et $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f.

▪ ***Limite finie en x_0 ($x_0 \in \mathbb{R}$).***

• f admet pour limite ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$) en x_0 si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ ou $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$.

On note : $\ell = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x_0} f$.

• f admet pour limite ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$) à gauche en x_0 si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, (x_0 - \alpha < x \leq x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ ou $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$.

On note : $\ell = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x_0^-} f$.

• f admet pour limite ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$) à droite en x_0 si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, (x_0 \leq x < x_0 + \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ ou $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$.

On note : $\ell = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x_0^+} f$.

▪ ***Cas particulier*** : si f est définie en x_0, alors f admet pour limite ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$) en x_0 si, et seulement si,

– lorsque f est définie à gauche et à droite de x_0 (i.e. : $\exists \alpha > 0,]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset \mathcal{D}_f$),

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell = f(x_0)$,

– lorsque f est définie à droite de x_0 (i.e. : $\exists \alpha > 0,]x_0, x_0 + \alpha[\subset \mathcal{D}_f$), $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$,

– lorsque f est définie à gauche de x_0 (i.e. : $\exists \alpha > 0,]x_0 - \alpha, x_0[\subset \mathcal{D}_f$), $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$.

▪ ***Limite infinie en x_0 ($x_0 \in \mathbb{R}$).***

• f tend vers $+\infty$ en x_0 si : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$,

• f tend vers $-\infty$ en x_0 si : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) < A)$.

2. Limite finie ou infinie en $\pm\infty$

Soit f une fonction définie au voisinage de $\pm\infty$.

▪ ***Limite finie en $\pm\infty$.***

• f admet pour limite ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$) en $+\infty$ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f, (x > B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ ou $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$,

- f admet pour limite ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$) en $-\infty$ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f, (x < B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ ou $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$.

▪ ***Limite infinie en $\pm\infty$.***

- f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f, (x > B \Rightarrow f(x) > A)$,
- f tend vers $-\infty$ en $+\infty$ si : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f, (x > B \Rightarrow f(x) < A)$,
- f tend vers $+\infty$ en $-\infty$ si : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f, (x < B \Rightarrow f(x) > A)$,
- f tend vers $-\infty$ en $-\infty$ si : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f, (x < B \Rightarrow f(x) < A)$.

3. Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre

▪ Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur I admettant une limite strictement positive en x_0. Alors : $\exists \alpha > 0, \exists \beta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \geq \beta)$.

Ce résultat peut être étendu aux cas où $x_0 \notin I$ mais se trouve à la frontière de I, ou encore pour $x_0 = +\infty$ ou $x_0 = -\infty$ si I n'et pas majoré (resp. pas minoré).

▪ ***Théorème de prolongement des inégalités.*** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, f et g deux fonctions définies sur I telles que $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$ et $x_0 \in I$.

- Si f et g admettent une limite finie en x_0, alors : $\lim\limits_{x_0} f \leq \lim\limits_{x_0} g$.
- Si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{x_0} g = -\infty$, alors : $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$.

Ces résultats peuvent être étendus aux cas où $x_0 \notin I$ mais se trouve à la frontière de I, ou encore pour $x_0 = +\infty$ ou $x_0 = -\infty$ si I n'et pas majoré (resp. pas minoré).

▪ ***Existence d'une limite par encadrement (dit théorème "de l'encadrement").*** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $x_0 \in I$, f, g et h trois fonctions définies sur I telles que f et h admettent une même limite ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$) en x_0. Si $\forall x \in I, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, alors g admet une limite en x_0 et : $\lim\limits_{x_0} g = \ell$.

Ce résultat peut être étendu aux cas où $x_0 \notin I$ mais se trouve à la frontière de I, ou encore pour $x_0 = +\infty$ ou $x_0 = -\infty$ si I n'et pas majoré (resp. pas minoré).

4. Limite d'une fonction composée

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, f une fonction définie sur I, g une fonction définie sur f(I) et $x_0 \in I$.
Si $\lim\limits_{x_0} f = \ell$ ($\ell \in \overline{\mathbb{R}}$) et si $\lim\limits_{\ell} g = \ell'$ ($\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$), alors : $\lim\limits_{x_0} (g \circ f) = \ell'$.

Ces résultats peuvent être étendus aux cas où $x_0 \notin I$ mais se trouve à la frontière de I, ou encore pour $x_0 = +\infty$ ou $x_0 = -\infty$ si I n'et pas majoré (resp. pas minoré).

5. Caractérisation séquentielle d'une limite

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, f une fonction définie sur I, $x_0 \in I$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On a : $\lim\limits_{x_0} f = \ell$ si, et seulement si, pour toute suite u d'éléments de I de limite ℓ, la suite $(f(u_n))$ a pour limite ℓ.

Ce résultat peut être étendu aux cas où $x_0 \notin I$ mais se trouve à la frontière de I, ou encore pour $x_0 = +\infty$ ou $x_0 = -\infty$ si I n'et pas majoré (resp. pas minoré).

II. Continuité en un point

▪ ***Continuité en x_0 ($x_0 \in \mathbb{R}$).*** Soit f une fonction, $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition et $x_0 \in \mathcal{D}_f$.

❑ *Continuité à gauche en x_0.*

- f est continue à gauche en x_0 si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, (x_0 - \eta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ou $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon)$,
- f est continue à gauche en x_0 si, et seulement si : $\lim\limits_{x_0^-} f = f(x_0)$.

❑ *Continuité à droite en x_0.*

- f est continue à droite en x_0 si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, (x_0 < x < x_0 + \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ou $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon)$.
- f est continue à droite en x_0 si, et seulement si : $\lim\limits_{x_0^+} f = f(x_0)$.

❑ *Continuité en x_0.*

- f est continue en x_0 si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, (|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ou $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon)$,
- Soit g une fonction définie au voisinage de $f(x_0)$. Si f est continue en x_0 et si g est continue en $f(x_0)$, alors $(g \circ f)$ est continue en x_0.

Remarque : lorsque f est définie en x_0, f est continue (resp. continue à droite, resp. continue à gauche) en x_0 si, et seulement si, f admet une limite finie en x_0 (resp. en x_0 à droite, resp. en x_0 à gauche).

▪ ***Prolongement par continuité.*** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$. f est prolongeable par continuité en x_0 si, et seulement si, f admet une limite finie ℓ $(\ell \in \mathbb{R})$ en x_0. Soit alors g la fonction définie par : $\begin{cases} \forall x \in I \setminus \{x_0\}, g(x) = f(x) \\ g(x_0) = \ell \end{cases}$. g s'appelle le prolongement par continuité de f en x_0.

▪ ***Fonctions usuelles.*** Les fonctions polynômes, rationnelles, circulaires, racines, puissances, logarithmes, exponentielles, sont continues en tout point de leur ensemble de définition.

La somme, le produit, le quotient (si le dénominateur ne s'annule pas) de deux fonctions continues en x_0 sont continues en x_0.

III. Comparaison de fonctions au voisinage d'un point

1. Fonction négligeable devant une autre

▪ ***Définition.*** Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de x_0 ($x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$), on dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0, et on note : $f(x) = o(g(x))$, s'il existe une fonction ε telle qu'au voisinage de x_0 : $f = \varepsilon \cdot g$ avec $\lim\limits_{x_0} \varepsilon = 0$, ou, ce qui est équivalent, si pour tout réel $\alpha > 0$, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que : $\forall x \in V_{x_0} \cap \mathcal{D}_f$, $|f(x)| \leq \alpha |g(x)|$.

▪ ***Cas particulier.*** Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0, f est négligeable devant g si, et seulement si, $\lim\limits_{x_0} \frac{f}{g} = 0$.

▪ ***Propriétés :*** Si, au voisinage de x_0 : $f(x) = o(g(x))$ et $h(x) = o(k(x))$, alors :

- $f(x)\,h(x) = o(g(x)\,k(x))$,
- $\forall p \in \mathbb{N}^*, f^p(x) = o(g^p(x))$,
- $\dfrac{f(x)}{k(x)} = o\left(\dfrac{g(x)}{h(x)}\right)$ (si h et k ne s'annulent pas au voisinage de x_0).

Exemples usuels (au voisinage de $+\infty$) :

- Si $\alpha < \beta$, $x^\alpha = o(x^\beta)$, i.e. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha-\beta} = 0$,
- Si $\alpha > 0$ ($\beta \in \mathbb{R}$), $(\ln x)^\beta = o(x^\alpha)$, i.e. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$,
- Si $\alpha > 0$ ($\beta \in \mathbb{R}$), $x^\beta = o((e^x)^\alpha)$, i.e. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\beta}{(e^x)^\alpha} = 0$,

- Si $a > 1$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), $x^\alpha = o(a^x)$, i.e. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$,
- Si $|a| < |b|$, $a^x = o(b^x)$, i.e. $\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{b^x} = 0$.

Exemples usuels (au voisinage de 0) :

- Si $\alpha > \beta$, $x^\alpha = o(x^\beta)$, i.e. $\lim_{x \to 0} x^{\alpha - \beta} = 0$,
- Si $\alpha > 0$ (et $\beta \in \mathbb{R}$), $(|\ln x|)^\beta = o(x^{-\alpha})$, i.e. $\lim_{x \to 0^+} x^\alpha (|\ln x|)^\beta = 0$.

2. Fonctions équivalentes

■ ***Définition.*** Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de x_0 ($x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$), f et g sont équivalentes au voisinage de x_0, et on note : $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$, si f - g est négligeable devant g au voisinnge de x_0, ou, ce qui est équivalent, s'il existe une fonction h telle qu'au voisinage de x_0 : $f = h \cdot g$ avec $\lim_{x_0} h = 1$.

■ ***Cas particulier.*** Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0, f et g sont équivalentes si, et seulement si : $\lim_{x_0} \frac{f}{g} = 1$.

■ ***Existence d'une limite.*** Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ ($x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$) et si $\lim_{x_0} f = \ell$ ($\ell \in \overline{\mathbb{R}}$), alors $\lim_{x_0} g = \ell$: deux fonctions équivalentes en un point ont même limite en ce point si celle-ci existe.

■ ***Propriétés :*** Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ ($x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$) et si $h(x) \underset{x_0}{\sim} k(x)$, alors :

- $f(x)$ et $g(x)$ ont même signe au voisinage de x_0,
- $f(x)h(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)k(x)$,
- $\forall p \in \mathbb{N}$, $f^p(x) \underset{x_0}{\sim} g^p(x)$,
- si f et g prennent des valeurs positives ou nulles au voisinage de x_0 : $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$, $f^\alpha(x) \underset{x_0}{\sim} g^\alpha(x)$,
- si f et g prennent des valeurs strictement positives au voisinage de x_0 : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $f^\alpha(x) \underset{x_0}{\sim} g^\alpha(x)$,
- $\frac{f(x)}{h(x)} \underset{x_0}{\sim} \frac{g(x)}{k(x)}$ (si h et k ne s'annulent pas au voisinage de x_0),
- si f est dérivable en x_0 ($x_0 \in \mathbb{R}$) avec $f'(x_0) \neq 0$, on a : $f(x) - f(x_0) \underset{x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)$.

Exemples usuels :

- $\sin x \underset{0}{\sim} x$,
- $\cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$,
- $\tan x \underset{0}{\sim} x$,
- $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ ou $\ln x \underset{1}{\sim} x - 1$,
- $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$,
- $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$ ($\alpha \in \mathbb{R}$),
- Soient p et n deux entiers naturels tels que $p < n$, si $P = \sum_{k=p}^{n} a_k X^k$ (avec $a_p \neq 0$ et $a_n \neq 0$), alors : $P(x) \underset{0}{\sim} a_p x^p$ et $P(x) \underset{\pm\infty}{\sim} a_n x^n$,
- $\operatorname{ch} x - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$,
- $\operatorname{sh} x \underset{0}{\sim} x$,
- $\operatorname{th} x \underset{0}{\sim} x$,
- $\operatorname{Arcsin} x \underset{0}{\sim} x$,

- $\text{Arctan}\, x \underset{0}{\sim} x$,
- $\text{Argsh}\, x \underset{0}{\sim} x$,
- $\text{Argth}\, x \underset{0}{\sim} x$,
- $\text{Argch}\,(1+x) \underset{0}{\sim} \sqrt{2x}$.

3. Fonction dominée par une autre

▪ ***Définition.*** Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de x_0 ($x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$), f est dominée par g au voisinage de x_0, et on note : $f(x) = O(g(x))$, s'il existe un réel $\lambda > 0$ tel qu'au voisinage de x_0 : $|f(x)| \leq \lambda |g(x)|$, ou, ce qui est équivalent, s'il existe une fonction h telle qu'au voisinage de x_0, h soit bornée et : $f = h \cdot g$.

▪ ***Cas particulier.*** Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0, f est dominée par g si, et seulement si, $\frac{f}{g}$ est bornée.

▪ ***Propriétés :*** Si, au voisinage de x_0 : $f(x) = O(g(x))$ et $h(x) = O(k(x))$, alors :

- $f(x)\,h(x) = O(g(x)\,k(x))$,
- $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $f^p(x) = O(g^p(x))$.

B. Etude globale de fonctions

I. Fonctions sup, inf, partie entière et valeur absolue.

▪ ***Fonctions sup(f, g) et inf(f, g).*** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur I. On note sup(f, g) et inf(f, g) les fonctions définies sur I par :

$$\cdot\ \forall x \in I, \begin{cases} (\sup(f,g))(x) = \sup(f(x), g(x)) \\ (\inf(f,g))(x) = \inf(f(x), g(x)) \end{cases}.$$

Propriété :

· Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans I et non réduit à un point. Si f et g sont continues sur J, alors sup(f, g) et inf(f, g) sont continues sur J.

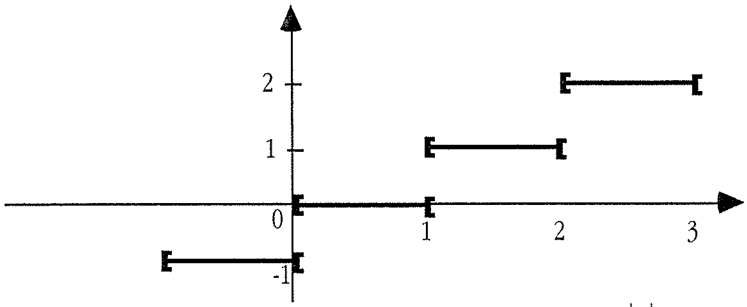
▪ ***Fonction partie entière.*** On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction partie entière qui à tout réel x associe le plus grand entier inférieur ou égal à x, et on la note $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ ou $x \mapsto \text{Ent}(x)$.

Propriétés :

$$\cdot\ \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \\ x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \end{cases},$$

· La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$ et est continue à gauche en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Représentation graphique :



■ ***Fonction valeur absolue.*** On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction valeur absolue, notée $x \mapsto |x|$, par :

• $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \text{si } x \leq 0, |x| = -x \\ \text{si } x \geq 0, |x| = x \end{cases}$.

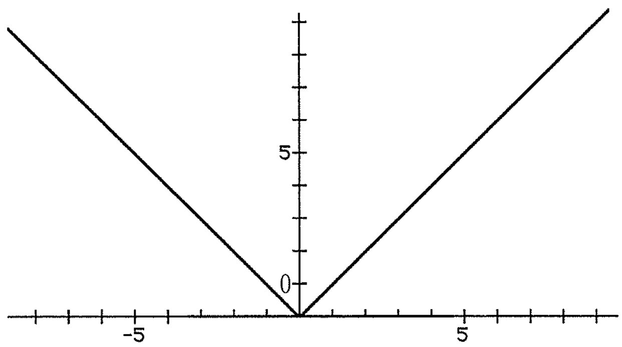
Propriétés :

La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$,

• $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = \max(x, 0) + \max(-x, 0)$,

• $\max(a, b) = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$.

Représentation graphique :



■ ***Fonction*** $|f|$. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. On définit sur I la fonction $|f|$ par : $x \mapsto |f(x)|$.

Propriété :

• Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans I. Si f est continue sur J, alors $|f|$ est continue sur J.

■ ***Fonctions trigonométriques hyperboliques.*** On appelle cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique les fonctions, notées respectivement ch, sh et th, définies sur $\mathbb{R}$ par :

• $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

• $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

• $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

Propriété :

• On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

II. Fonctions paires, impaires et périodiques

• f est paire si : $\forall x\in \mathcal{D}_f$, $\begin{cases}(-x)\in \mathcal{D}_f \\ f(-x) = f(x)\end{cases}$,

• f est impaire si : $\forall x\in \mathcal{D}_f$, $\begin{cases}(-x)\in \mathcal{D}_f \\ f(-x) = -f(x)\end{cases}$,

• f est périodique si : $\exists t\in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x\in \mathcal{D}_f$, $\begin{cases}(x+t)\in \mathcal{D}_f \\ f(x+t) = f(x)\end{cases}$, t est alors une période de f. S'il existe $T\in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'ensemble $\{kT, k\in \mathbb{N}^*\}$ soit l'ensemble des périodes de f, alors T est appelé la période de f.

Remarque : T est alors la plus petite période de f.

III. Fonctions bornées

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.

• f est majorée sur I si : $\exists M\in \mathbb{R}$, $\forall x\in I$, $f(x) \leq M$. M est alors un majorant de f sur I. On appelle alors borne supérieure de f sur I, et l'on note : $\sup\limits_I f$, ou : $\sup\limits_{x\in I} f(x)$, la borne supérieure de l'ensemble image f(I).

• f est minorée sur I si : $\exists m\in \mathbb{R}$, $\forall x\in I$, $f(x) \geq m$. m est alors un minorant de f sur I. On appelle alors borne inférieure de f sur I, et l'on note : $\inf\limits_I f$, ou : $\inf\limits_{x\in I} f(x)$, la borne inférieure de l'ensemble image f(I).

• f est bornée sur I si f est majorée et minorée sur I.

Propriété :

· Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $x_0\in I$, f et g deux fonctions définies sur I. Si f est bornée sur I et si g admet pour limite 0 en x_0, alors la fonction fg admet pour limite 0 en x_0.

Ce résultat peut être étendu aux cas où $x_0\notin I$ mais se trouve à la frontière de I, ou encore pour $x_0 = +\infty$ ou $x_0 = -\infty$ si I n'et pas majoré (resp. pas minoré).

IV. Fonctions monotones. Existence de la limite d'une fonction monotone

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et f une fonction définie sur I.

• f est croissante sur I si : $\forall (x_1, x_2)\in I^2$, $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$,

• f est strictement croissante sur I si : $\forall (x_1, x_2)\in I^2$, $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$,

• f est décroissante sur I si : $\forall (x_1, x_2)\in I^2$, $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$,

• f est strictement décroissante sur I si : $\forall (x_1, x_2)\in I^2$, $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$,

• f est monotone sur I si f est croissante sur I ou décroissante sur I,

• f est strictement monotone sur I si f est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.

▪ ***Existence de la limite d'une fonction monotone (dit théorème "de la limite monotone").*** Soient $(a, b)\in (\overline{\mathbb{R}})^2$ tels que a < b et f une fonction monotone sur]a, b[. f admet une limite (finie ou infinie) à droite en a et à gauche en b.

De plus, f admet une limite finie à gauche et à droite en tout point de]a, b[.

V. Fonctions continues. Opérations sur les fonctions continues

▪ Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et f une fonction définie sur I. f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

■ Les fonctions polynômes, rationnelles, circulaires, racines, puissances, logarithmes, exponentielles sont continues sur leur domaine de définition.

■ La somme, le produit, le quotient (si le dénominateur ne s'annule pas) de deux fonctions continues sur I sont continues sur I.
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non réduits à un point, f une fonction définie sur I tels que $f(I) \subset J$ et g une fonction définie sur J. Si f est continue sur I et si g est continue sur J, alors $(g \circ f)$ est continue sur I.

VI. Fonctions continues par morceaux. Fonctions en escalier

■ Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$. f est dite en escalier s'il existe une suite $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ ($n\in\mathbb{N}^*$) strictement croissante de points de $[a, b]$ avec $x_0 = a$ et $x_n = b$ tels que, pour tout $i\in[\![0, n-1]\!]$, f soit constante sur $]x_i, x_{i+1}[$. *Exemple : la fonction* $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ *ou* $x \mapsto Ent(x)$ *est une fonction en escalier.*

■ Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et f une fonction définie sur I. f est continue par morceaux sur I si f n'a qu'un nombre dénombrable de points de discontinuité, si elle admet une limite finie à droite et à gauche en tout point de discontinuité de $\mathring{I}$ et si, dans le cas où I est fermé à gauche en a (respectivement à droite en b), elle admet une limite finie à droite en a (resp. à gauche en b).

VII. Fonctions uniformément continues

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et f une fonction définie sur I.

■ ***Définition.*** f est uniformément continue sur I si :
$\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0, \forall(x, x')\in\mathcal{D}_f^2, (|x - x'| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$ ou $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon)$.

■ ***Propriété.*** Si f est uniformément continue sur I, alors f est continue sur I.

■ ***Théorème de Heine.*** Soit $(a, b)\in I^2$. Si f est continue sur $[a, b]$, alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.

VIII. Théorèmes des valeurs intermédiaires

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $(a, b)\in I^2$ tels que $a < b$ et f une fonction continue sur I.

■ ***Théorème des valeurs intermédiaires.*** Pour tout réel λ compris entre f(a) et f(b), il existe un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = \lambda$.

■ ***Cas particulier.*** Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors : $\exists c\in]a, b[, f(c) = 0$.

■ ***Corollaire.*** L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

IX. Image d'un segment par une fonction continue

■ L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

■ Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes sur ce segment (i.e. admet un maximum global et un minimum global sur ce segment).

■ Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f([a, b]) = [m, M]$ ($(m, M)\in\mathbb{R}^2$, $m < M$). m est appelé minimum de f sur $[a, b]$ et on note : $m = \min\limits_{[a,b]} f = \min\limits_{t\in[a,b]} f(t)$. M est appelé maximum de f sur [a, b] et on note : $M = \max_{[a,b]} f = \max_{t \in [a,b]} f(t)$.

X. Fonctions réciproques

▪ ***«Théorème de la bijection».*** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors f réalise une bijection de I sur f(I) et f(I) est un intervalle.

▪ ***Propriétés.*** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Si f réalise une bijection de I sur J = f(I) et si f est continue et strictement monotone sur I, alors :

– f^{-1} est continue et strictement monotone sur J, de même sens de variation que f sur I,

– la courbe représentative de f^{-1} dans un repère orthonormal se déduit de celle de f par symétrie par rapport à la première bissectrice.

▪ ***Cas des fonctions circulaires et hyperboliques.***

• La fonction cos réalise une bijection décroissante de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$ et sa bijection réciproque, définie sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $[0, \pi]$, est notée Arccos.

• La fonction sin réalise une bijection croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$ et sa bijection réciproque, définie sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, est notée Arcsin.

• La fonction tan réalise une bijection croissante de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$ et sa bijection réciproque, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, est notée Arctan.

• La fonction ch réalise une bijection croissante de $\mathbb{R}^+$ sur $[1, +\infty[$ et sa bijection réciproque, définie sur $[1, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, est notée Argch.

• La fonction sh réalise une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et sa bijection réciproque, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, est notée Argsh.

• La fonction th réalise une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$ et sa bijection réciproque, définie sur $]-1, 1[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, est notée Argth.

XI. Fonctions lipschitziennes

▪ ***Définition.*** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. On dit que f est lipschitzienne sur I (ou k-lipschitzienne, où $k \in \mathbb{R}_+^*$) si : $\exists k \in \mathbb{R}_+^* \, / \, \forall (x, y) \in I^2, \ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

C. Représentation graphique

I. Tangentes, éléments de symétrie et points d'inflexion

1. Tangentes

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, f une fonction définie sur I, et $a \in I$.

• Si f est dérivable en a, alors la courbe représentative de f admet une tangente en (a, f(a)), d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$,

• Si $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$ ou si f est dérivable au voisinage de a avec $\lim_a f' = \pm\infty$, alors la courbe représentative de f admet une tangente verticale en (a, f(a)).

2. Eléments de symétrie dans un repère orthogonal

■ ***Symétrie axiale.*** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. Si : $\forall x \in I$, $(2a - x) \in I$ et : $\forall x \in I$, $f(2a - x) = f(x)$, alors la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe d'équation $x = a$.

■ ***Symétrie centrale.*** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, a et b deux réels et f une fonction définie sur I. Si, pour tout $x \in I$, $(2a - x) \in I$ et : $\forall x \in I$, $f(2a - x) = 2b - f(x)$, alors la courbe représentative de f est symétrique par rapport au point de coordonnées (a, b).

3. Points d'inflexion

■ ***Définition.*** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, a un élément de I, α un réel strictement positif tel que $]a - \alpha, a + \alpha[\subset I$ et f une fonction définie sur I. Si f est convexe sur $]a - \alpha, a]$ (resp. sur $[a, a + \alpha[$) et concave sur $[a, a + \alpha[$ (resp. sur $]a - \alpha, a]$), alors la courbe représentative de f présente un point d'inflexion en (a, f(a)).

■ ***Propriété.*** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et une fonction de classe C^2 sur I. La courbe représentative de f présente un point d'inflexion en (a, f(a)) si, et seulement si, f'' s'annule en changeant de signe en a.

II. Branches infinies

Soit f une fonction, et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative :

■ Si $\lim\limits_{b^{\pm}} f = \pm\infty$ $(b \in \mathbb{R})$, $\mathscr{C}_f$ admet une *asymptote verticale d'équation $x = b$*.

■ Si $\lim\limits_{\pm\infty} f = b$ $(b \in \mathbb{R})$, $\mathscr{C}_f$ admet une *asymptote horizontale d'équation $y = b$*.

■ Si $\lim\limits_{\pm\infty} f = \pm\infty$,

- si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$, $\mathscr{C}_f$ admet une *branche parabolique verticale*.
- si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, $\mathscr{C}_f$ admet une *branche parabolique horizontale*.
- si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ $(a \in \mathbb{R}^*)$, il faut étudier la fonction $x \mapsto f(x) - ax$,
  - si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax) = b$ $(b \in \mathbb{R})$, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$,
  - si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$, $\mathscr{C}_f$ admet une *branche parabolique* de direction la droite d'équation $y = ax$,
  - si $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ et $x \mapsto f(x) - ax$ n'ont pas de limite en $\pm\infty$, $\mathscr{C}_f$ n'admet ni asymptote ni branche parabolique.

D. Programme officiel

A la limite du programme :

· Les dérivées des fonctions Argch, Argsh et Argth.

Chapitre 13. Fonctions à valeurs réelles ou complexes : limites, continuité, dérivabilité

Maths SUP

OPTIMAL *SUP-SPE*

Fiche méthodologique

Dans toute la fiche méthodologique, les fonctions considérées sont des fonctions numériques à valeurs dans $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, supposées définies au moins sur un intervalle I non réduit à un point. Par ailleurs, a, b désignent des réels fixés, et x_0 désigne un élément quelconque de $\overline{\mathbb{R}}$ (on rappelle que : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$).

0. Apprendre son cours

Notation : il y a plusieurs façons de noter une fonction. Par exemple, pour parler de la fonction exponentielle, on peut écrire :

– la fonction exp,

– la fonction $x \mapsto e^x$,

– la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

Attention à ne pas écrire : « la fonction f(x) », car f(x) ne désigne pas une fonction, mais un nombre, défini pour une valeur donnée de x.

Attention également à ne pas parler de la limite d'une fonction tant qu'on n'en a pas prouvé l'existence. Une fois l'existence de la limite établie en x_0, on pourra noter : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, ou : $\lim\limits_{x_0} f$.

Dans toute la fiche méthode, on convient de noter $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble : $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

I. Montrer qu'une fonction est majorée, minorée, bornée, périodique, déterminer sa borne supérieure, inférieure

Attention : les notions de fonction (numérique) "majorée" et de fonction (numérique) "minorée" ne s'appliquent qu'aux fonctions à valeurs réelles ($\mathbb{C}$ n'étant pas un ensemble totalement ordonné, voir chapitre "**Préliminaires**").

1. Montrer qu'une fonction réelle est (ou n'est pas) majorée, minorée et déterminer le cas échéant sa borne supérieure, inférieure

Attention tout d'abord à ne pas confondre "majorant", "borne supérieure" et "maximum". Tout d'abord, il n'y a pas unicité du majorant : on parle donc "d'un" majorant et non "du" majorant. Une fonction admet une borne supérieure si elle admet un majorant ; la borne supérieure est alors unique et c'est le plus petit majorant de la fonction. Cette borne supérieure peut être atteinte (auquel cas la borne supérieure est également appelée "maximum" de la fonction), mais elle peut aussi ne pas être atteinte : dans ce dernier cas, la fonction admet une borne supérieure mais pas de maximum. Le soin est laissé au lecteur de remplacer dans ces explications les mots "majorant", "borne supérieure" et "maximum" par les mots "minorant", "borne inférieure" et "minimum".

Pour montrer qu'une fonction f à valeurs réelles est majorée (resp. minorée), sur un intervalle $J \subset I$, on peut :

- se ramener à la définition, en exhibant un majorant et en veillant à ce que le majorant considéré soit indépendant de x,
- utiliser le tableau de variations de f,
- si J est un segment, montrer que J est continue sur ce segment (toute fonction continue sur un segment étant bornée et

atteignant ses bornes sur ce segment).

Pour déterminer la borne supérieure (resp. inférieure) d'une fonction f à valeurs réelles, on peut :

- se ramener à la définition, en exhibant un majorant (resp. minorant) et en veillant à ce que le majorant (resp. minorant) considéré soit indépendant de x, puis en montrant que ce majorant (resp. minorant) est le plus petit (resp. le plus grand) possible en raisonnant par l'absurde,
- si f est définie comme combinaison simple de plusieurs fonctions, utiliser les propriétés de l'opérateur sup (resp. inf) en les redémontrant car elles ne font pas partie du cours (voir chapitre "**Préliminaires**").

Pour montrer qu'une fonction f à valeurs réelles **n'est pas** majorée (resp. minorée), on peut raisonner par l'absurde : en la supposant majorée (resp. minorée), considérer sa borne supérieure (resp. inférieure) et exhiber une valeur prise par cette fonction supérieure (resp. inférieur) à cette borne.

2. Montrer qu'une fonction est bornée

Pour montrer qu'une fonction f est bornée sur un intervalle $J \subset I$, on peut :

- s'il s'agit d'une suite **réelle**, montrer que f est minorée et majorée sur J,
- s'il s'agit d'une suite **réelle**, montrer que la fonction $|f|$ est majorée (la notation $|.|$ désignant ici la valeur absolue) : voir point I.1 ci-dessus,
- si J est un segment, montrer que J est continue sur ce segment (toute fonction continue sur un segment étant bornée et atteignant ses bornes sur ce segment),
- si J est de la forme $[x_0, +\infty[$ et si f admet une limite finie en $+\infty$, utiliser la définition de la limite pour majorer $|f|$ à partir d'un certain rang, puis utiliser le point précédent pour majorer f sur $[x_0, x_1]$ (cette méthode pouvant bien sûr s'étendre à un intervalle de la forme $]-\infty, x_0]$ si f admet une limite finie en $-\infty$),
- s'il s'agit d'une fonction à valeurs **complexes non toutes réelles**, montrer que la fonction réelle $|f|$ est majorée (la notation $|.|$ désignant ici le module), par exemple en montrant que les deux fonctions réelles réelles $\mathcal{Re}(f)$ et $\mathcal{Im}(f)$ sont majorées (voir point I.1 ci-dessus).

☞ Voir l'exercice "Suites récurrentes linéaires d'ordre p".

3. Montrer qu'une fonction est périodique

Pour montrer qu'une fonction f est périodique, le cas échéant à partir d'un certain rang x_0, on peut :

- se ramener à la définition en exhibant un réel T strictement positif tel que : $\forall x \geq x_0, f(x+T) = f(x)$ (en prenant soin de ne parler de "la" période de la fonction que si la période obtenue est la plus petite des périodes possibles),
- s'il s'agit d'une somme (finie) de plusieurs fonctions périodiques, considérer la somme des périodes de ces fonctions (qui est alors une période de f, à savoir redémontrer),
- s'il s'agit d'un produit (fini) de plusieurs fonctions périodiques, considérer le produit des périodes de ces fonctions (qui est alors une période de f, à savoir redémontrer).

En outre, il peut arriver que pour comparer des périodes entières d'une même fonction (afin de déterminer "la" plus petite période entière d'une fonction), il s'avère utile de faire apparaître certaines divisions euclidiennes d'entiers.

II. Etudier les variations d'une fonction

Attention : de même que pour les notions de "majorant" ou de "minorant", les notions de fonction (numérique) "croissante" ou "décroissante" ne s'appliquent qu'aux fonctions à valeurs réelles ($\mathbb{C}$ n'étant pas un ensemble totalement ordonné, voir chapitre "**Préliminaires**").

1. En utilisant la définition

Pour montrer qu'une fonction f à valeurs rélles est croissante sur un intervalle $J \subset I$, il n'est pas toujours utile ni judicieux d'utiliser la dérivée de f ; et ce d'autant que les fonctions considérées ne sont pas toujours dérivables (il peut arriver également que les fonctions soient effectivement dérivables, mais que leur dérivabilité fasse l'objet d'une partie du problème et qu'on ne puisse ainsi pas utiliser l'hypothèse de dérivabilité dès le début du problème). On peut également utiliser la définition :

- si : $\forall(x_1, x_2)\in J^2$, $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$, alors f est croissante sur J,
- si : $\forall(x_1, x_2)\in J^2$, $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$, alors f est strictement croissante sur J,
- si : $\forall(x_1, x_2)\in J^2$, $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$, alors f est décroissante sur J,
- si : $\forall(x_1, x_2)\in J^2$, $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$, alors f est strictement décroissante sur J.

2. Si f s'écrit comme une combinaison simple de fonctions dont la monotonie est identique et connue

Pour déterminer la monotonie d'une fonction f à valeurs réelles s'écrivant comme une combinaison simple de fonctions dont la monotonie est connue sur certains intervalles communs, on peut :

- s'il s'agit d'une somme de fonctions de même monotonie, conclure directement, f ayant alors, sur chacun des intervalles considérés, une monotonie identique à celles de ces fonctions,
- s'il s'agit d'un produit de fonctions à valeurs positives **positives** et de même monotonie, conclure directement, f ayant alors, sur chacun des intervalles considérés, une monotonie identique à celles de ces fonctions.

Le dernier point peut être étendu aux fonctions à valeurs négatives en faisant attention aux signes dans la manipulation des inégalités. Dans le cas d'un produit de suites dont les termes ne sont pas de signe constant, on ne peut en revanche pas conclure directement, et il faut alors se reporter aux autres méthodes.

3. Si la fonction est dérivable et si l'on peut calculer f'

Attention : cette méthode que la quasi-totalité des candidats pense maîtriser à 100 % depuis la classe de Terminale recèle en réalité plusieurs pièges que tout candidat sérieux de sup/spé se doit de connaître et d'éviter. On notera en particulier les points suivants :

- il ne faut pas oublier de justifier la dérivabilité de f,
- si une des deux méthodes précédemment exposées fonctionnent, il est parfaitement inutile (voire contre-productif) d'utiliser la dérivée,
- si f est dérivable sur [a, b] et si f' est positive sur [a, b], mais strictement positive uniquement sur]a, b[, voire sur]a, b[privé d'un nombre fini ou dénombrable de points, f demeure **strictement croissante sur [a, b]**,
- si f est continue sur [a, b] et monotone (resp. strictement monotone) sur]a, b[, alors f est monotone (resp. strictement monotone) sur [a, b].

III. Montrer qu'une fonction admet ou n'admet pas de limite en un point, déterminer sa limite si elle existe

Précisons tout d'abord ce qu'il ne faut pas faire : parler de la limite d'une fonction f ni écrire $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ tant qu'on n'a pas montré que f admet une limite en x_0. De plus, pour "passer à la limite" en un point dans une égalité ou dans une inégalité, il faut justifier au préalable que les fonctions en présence admettent toutes une limite finie en ce point (le cas échéant à l'aide du théorème de l'encadrement), et on rappelle qu'après passage à la limite, toutes les éventuelles inégalités strictes deviennent larges.

Notation : il y a deux façons de noter une limite :

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$,
- $\lim\limits_{x_0} f = \ell$.

1. En utilisant le théorème de la limite monotone

Pour montrer qu'une fonction à valeurs réelles admet une limite en un point x_0, on peut utiliser le théorème de la limite monotone (voir la fiche de cours pour les différents cas).

☞ Voir la fiche de cours.

2. En utilisant le théorème de l'encadrement

Si f, g et h sont trois suites réelles et si f et h admettent une même limite finie ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$) en x_0, et s'il existe un intervalle J contenant x_0 ou dont x_0 est une borne, tel que : $\forall x \in J$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, alors g admet ℓ pour limite en x_0.

☞ Voir les exercices "Suites dont l'expression en fonction de n est connue", "Étude générale de suite", "Convergence de suites définies par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$".

3. A l'aide de la continuité

Se souvenir que si f est définie en x_0, f admet une limite en x_0 si, et seulement si, f ets continue en x_0, et on a alors : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

4. En effectuant un calcul direct

Dans les cas suivants, il est possible de déterminer directement la limite de la suite u :

- si f est de la forme $x \mapsto g(x)^{h(x)}$ (où h est une fonction réelle à valeurs strictement positives), on peut rechercher la limite de la fonction $x \mapsto h(x)\ln(g(x))$, puis effectuer une composition de limites à l'aide de la fonction exponentielle,
- si f s'écrit sous forme de produit de fonctions strictement positives au voisinage de x_0, se ramener à une somme en composant par la fonction ln, puis après avoir trouvé la limite de $\ln \circ f$, effectuer une composition de limites à l'aide de la fonction exponentielle,
- si f est la composée par une fonction g d'une fonction h, effectuer avec soin une composition de limites, en prenant soin de justifier l'existence des limites considérées, le cas échéant en invoquant la continuité des fonctions g et/ou h
- si u est s'écrit sous forme de somme et/ou de produit de fonctions dont on connaît les limites en x_0 :

❑ ***Limite de la somme de deux fonctions réelles dont on connaît les limites respectives en x_0 :***

	$-\infty$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Indéterminé
$\ell' \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$\ell + \ell'$	$+\infty$
$+\infty$	Indéterminé	$+\infty$	$+\infty$

❑ ***Limite du produit de deux suites fonctions dont on connaît les limites respectives en x_0 :***

	$-\infty$	$\ell < 0$	0	$\ell > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Indéterminé	$-\infty$	$-\infty$
$\ell' < 0$	$+\infty$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$-\infty$
0	Indéterminé	0	0	0	Indéterminé
$\ell' > 0$	$-\infty$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Indéterminé	$+\infty$	$+\infty$

Dans les deux cas, pour lever des formes indéterminés, il est souvent utile d'utiliser des négligeabilités ou des équivalents (voir point VI ci-dessous).

☞ Voir l'exercice "Suites usuelles".

5. En comparant la fonction à une fonction dont on connaît le comportement au voisinage de x_0

Pour déterminer la nature d'une fonction f, on peut utiliser les comparaisons avec d'autres fonctions au voisinage de x_0:

- négligeabilités,
- fonction dominée par une autre,
- fonctions équivalentes,
- développements limités.

Pour toutes ces méthodes, voir point xxx ci-dessous. En particulier, on rappelle que deux fonctions équivalentes ont même limite si celle-ci existe.

6. En considérant la fonction $x \mapsto f(x) - \ell$

Pour montrer qu'une fonction f admet $\ell \in \mathbb{C}^*$ pour limite en x_0, on peut montrer que la fonction $x \mapsto f(x) - \ell$ admet 0 pour limite en x_0, éventuellement en considérant sa valeur absolue (ou son module s'il s'agit d'une fonction à valeurs complexes).

☞ Voir l'exercice "Théorème de Cesàro".

7. En utilisant la définition de la limite

Pour montrer qu'une fonction admet une limite finie ℓ en x_0, on peut revenir à la définition. Cette méthode est le plus souvent utilisée dans les exercices théoriques (notamment lorsque les fonctions ne sont pas définies explicitement). En règle générale, on dispose d'hypothèses concernant l'existence de limites finies pour certaines fonctions f, g, ... il faut montrer qu'une autre fonction F admet également une limite en x_0 et la déterminer. Pour montrer qu'une telle fonction admet une limite finie $\ell_F \in \mathbb{C}$ en utilisant la définition, on procède en général en cinq étapes :

- (étape 1) considérer un réel $\varepsilon > 0$ quelconque et fixé pour toute la suite du raisonnement,
- (étape 2) considérer pour chaque fonction f, g, ... qui tend vers $\ell_f \in \mathbb{C}$ ($\ell_g \in \mathbb{C}$, ...) en x_0, un intervalle I_f, I_g, ... centré sur x_0 ou admettant x_0 comme borne tel que : $\forall x \in I_f, \left|f(x) - \ell_f\right| \leq \varepsilon$ ($\forall x \in I_g, \left|g(x) - \ell_g\right| \leq \varepsilon$, ...),
- (étape 3) considérer l'intervalle $I = I_f \cap I_g \cap ...$ (veiller à ce que I soit bien défini), ce qui permet que pour tout réel x appartenant à I, toutes les inégalités sur f, g, ... soient vérifiées,
- (étape 4) manipuler les différentes inégalités obtenues et trouver un intervalle $J \subset I$ (et contenant x_0 ou admettant x_0 pour borne) tel que : $\forall x \in J, \left|F(x) - \ell\right| \leq \varepsilon$
- (étape 5) conclure.

Dans le cadre de cette méthode, il peut arriver que le membre de droite de la dernière inégalité obtenue soit un multiple de ε (par exemple 3ε). Dans cet exemple, il suffit, soit d'invoquer la surjectivité de la fonction $\varepsilon \mapsto 3\varepsilon$, soit plus simplement de considérer toutes les inégalités de départ pour $\frac{\varepsilon}{3}$.

Le soin est laissé au lecteur d'adpter cette méthode aux cas de fonctions admettant $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite.

☞ Voir la fiche de cours.

8. Si l'on veut montrer qu'une fonction admet une limite infinie en x_0

Pour montrer qu'une fonction f à valeurs réelles admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour limite en x_0, on peut :

- utiliser la définition (voir la fiche de cours pour les différents cas),
- montrer que la fonction est minorée par une fonction tendant vers $+\infty$ en x_0 (resp. majorée par une fonction tendant vers $-\infty$ en x_0).

9. Si l'on veut montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en x_0

Pour montrer qu'une fonction f à valeurs réelles n'admet pas de limite en x_0, on peut :

- si $x_0 = +\infty$, montrer que la suite $(f(n))$ n'admet pas de limite, le plus souvent en exhibant deux suites extraites n'admettant pas une limite commune,
- plus généralement, se souvenir que si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ (avec $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$), alors si φ est une application tendant vers x_0 en un point a, alors : $\lim\limits_{x \to a} f(\varphi(x)) = \ell$. On en déduit par contraposée que s'il existe deux fonctions φ_1 et φ_2 telles que : $\lim\limits_{x \to a} f(\varphi(x)) = \ell_1$ et : $\lim\limits_{x \to a} f(\varphi(x)) = \ell_2$, avec $\ell_1 \neq \ell_2$, alors f n'admet pas de limite en x_0,
- utiliser, de nouveau par contraposée, la caractérisation séquentielle de la limite (méthode analogue à la précédente mais avec des suites), en montrant qu'il existe deux suites u et v de limite x_0 telles que : $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell_1$ et : $\lim\limits_{n \to +\infty} f(v_n) = \ell_2$ avec $\ell_1 \neq \ell_2$.

IV. Montrer qu'une fonction est négligeable, équivalente, dominée par une autre fonction au voisinage d'un point x_0

1. Montrer qu'une fonction est négligeable devant une autre fonction au voisinage de x_0

Pour montrer qu'une fonction f est négligeable devant une autre fonction g au voisinage de x_0, on peut :

- si g ne s'annule pas au voisinage de x_0, montrer que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 0 en x_0, le plus souvent à l'aide du théorème de l'encadrement (voir point V.2 ci-dessus),
- revenir à la définition, en montrant qu'il existe une fonction ε de limite nulle en x_0 et un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 tels que : $\forall x \in \mathcal{V}(x_0)$, $f(x) = \varepsilon(x)\, g(x)$,
- utiliser les croissances comparées usuelles.

1. Montrer qu'une fonction est dominée par une autre fonction au voisinage de x_0

Pour montrer qu'une fonction f est dominée par une autre fonction g au vosinage de x_0, on peut :

- si g ne s'annule pas au voisinage de x_0, montrer que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de x_0,
- revenir à la définition, en montrant qu'il existe une fonction α bornée et un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 tels que : $\forall x \in \mathcal{V}$, $f(x) = \alpha(x)\, g(x)$.

3. Montrer que deux fonctions sont équivalentes au voisinage de x_0 (lorsque l'énoncé donne l'équivalent)

Pour montrer que deux fonctions f et g (connues) sont équivalentes au vosinage de x_0, on peut :

- si g ne s'annule pas au voisinage de x_0, montrer que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 1 en x_0, le plus souvent à l'aide du théorème de l'encadrement (voir point V.2 ci-dessus),
- revenir à la définition, en montrant que la fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$ est négligeable devant l'une des fonctions f ou g (voir point VII.2 ci-dessus),
- montrer qu'il existe une fonction h de limite 1 et un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 tels que : $\forall x \in \mathcal{V}$, $f(x) = h(x)\, g(x)$.

☞ Voir les exercices "Recherche d'équivalents", "Suites et partie entière".

4. Déterminer un équivalent d'une fonction au voisinage de x_0 (lorsque l'énoncé ne donne pas l'équivalent)

Pour déterminer un équivalent (inconnu) d'une fonction f au voisinage de x_0, on peut :

- conjecturer un équivalent et le montrer à l'aide du point précédent,
- si f tend vers $\ell \in \mathbb{C}^*$ en x_0, conclure directement que : $f(x) \underset{x_0}{\sim} \ell$ (ceci n'étant pas valable si $\ell = 0$),
- utiliser les croissances comparées usuelles,
- si f s'exprime comme somme finie de fonctions et si les termes de la somme sont tous négligeables par rapport à l'un des termes de la somme, f est alors équivalente au terme dominant de la somme,
- si f s'exprime sous forme de somme finie de fonctions et que les termes de la somme ne sont pas négligeables les uns par rapport aux autres, utiliser les développements limités ou asymptotiques (voir le chapitre "**Formules de Taylor. Développements limités**"),
- utiliser les compositions d'équivalents licites avec certaines fonctions et sous certaines hypothèses (**à la limite du programme**, démonstrations à connaître),
- encadrer f, au voisinage de x_0, par deux fonctions équivalentes entre elles, f étant alors équivalente à chacune d'elles en x_0 (démonstration à connaître, à l'aide du théorème de l'encadrement).

☞ Voir les exercices "Compositions d'équivalents", " xxx à compléter".

V. Montrer qu'une fonction est continue, dérivable, de classe C^p, de classe C^∞

Précisons tout d'abord que pour qu'une fonction soit continue, dérivable, de classe C^p ($p \in \mathbb{N}^*$), de classe C^∞ en un point a, il est nécessaire que a appartienne au domaine de définition de a.

0. Méthodes générales valables aussi bien pour la continuité, la dérivabilité, le caractère de classe C^p ou C^∞

Pour montrer qu'une fonction f définie en a est continue (resp. dérivable, resp de classe C^p ($p \in \mathbb{N}^*$), resp. de classe C^∞) en a, on peut :

▪ si f s'écrit sous forme de somme, produit, quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions continues (resp. dérivable, resp. de classe C^p, resp. de classe C^∞) en a, conclure directement par théorèmes généraux. Attention, la réciproque est fausse : un "cocktail" de fonctions non continues (resp. dérivables etc.) peut être une fonction continue (resp. dérivable etc.) en a,

▪ si f est la composée de plusieurs fonctions, procéder de la même manière mais en veillant bien aux ensembles de départ et aux valeurs prises par chacune des fonctions dans les compositions en présence.

1. Montrer qu'une fonction (n')est (pas) continue en un point, sur un intervalle

Attention à ne pas confondre, lorsque f présente un problème de continuité en a, les expressions "f est continue en a" et "f est prolongeable par continuité en a" : si f est définie en a, elle ne peut pas être *prolongeable* par continuité en a.

▪ Pour montrer qu'une fonction f définie en a est continue en a, on peut, outre les méthodes du point 0 :

❑ revenir à la définition en montrant que : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ (condition nécessaire et suffisante),

❑ si a appartient à l'intérieur de I, montrer que f est continue à droite et à gauche en a (condition nécessaire et suffisante),

❑ montrer que f admet un développement limité d'ordre 0 en a (condition nécessaire et suffisante, voir le chapitre "**Formules de Taylor. Développements limités**"),

❑ montrer que f est la limite uniforme d'une suite de fonctions continues en a (MP - PSI uniquement, voir le chapitre "**Suites et séries de fonctions**")

❑ montrer que f est développable en série entière au voisinage de a (hors-programme en première année, voir le chapitre "**Séries entières**")

❑ montrer plus généralement que f est dérivable en a (condition suffisante mais non nécessaire).

▪ Pour montrer qu'une fonction f définie sur I est continue sur I, on peut :

❑ montrer que f est continue en tout point de I à l'aide des méthodes précédentes,

❑ montrer que f est lipschitzienne sur I, et conclure à l'aide du théorème de l'encadrement,

❑ montrer que f est uniformément continue sur I (MPSI - MP - PSI uniquement)

2. Montrer qu'une fonction (n')est (pas) dérivable en un point, sur un intervalle

▪ Pour montrer qu'une fonction f définie en a est dérivable en a, on peut, outre les méthodes du point 0 :

❑ avant tout, s'assurer que f est bien continue en a (condition nécessaire mais non suffisante),

❑ montrer que le taux d'accroissement de f admet une limite finie en x_0 (condition nécessaire et suffisante) :

o soit en montrant que la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie en x_0,

o soit en montrant que la fonction $h \mapsto \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ admet une limite finie en 0,

❑ montrer plus généralement que f est de classe C^1 en a (condition suffisante mais non nécessaire), notamment à l'aide du théorème de prolongement des fonctions de classe C^1,

❑ si a appartient à l'intérieur de I, montrer que f est dérivable à gauche et à droit en a et que ses deux nombres dérivés sont égaux (condition nécessaire et suffisante),

❑ montrer que f admet un développement limité d'ordre 1 en a (condition nécessaire et suffisante).

■ Pour montrer qu'une fonction f définie sur I est dérivable sur I, il suffit de montrer que f est dérivable en tout point de I.

3. Montrer qu'une fonction (n')est (pas) de classe C^1 sur un intervalle

Pour montrer qu'une fonction f définie sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur $[a, b]$ (avec "problème en a"), on peut :

■ **Option A** : utiliser la définition en montrant successivement que :
– f est de classe C^1 sur $]a, b]$ (par théorème généraux, cf. supra),
– f est *dérivable* en a,
– f' admet une limite fine en a, égale au nombre f'(a) préalablement déterminé.

■ **Option B** : utiliser le théorème de prolongement des fonctions de classe C^p, en montrant successivement que :
– f est de classe C^1 sur $]a, b]$ (par théorème généraux, cf. supra),
– f est *continue* en a,
– f' admet une limite fine en a.

L'option A exige le calcul de la limite d'un taux d'accroissement là où l'option B exige simplement le calcul d'une limite simple. C'est pourquoi **l'option B doit être privilégiée**.

4. Montrer qu'une fonction (n')est (pas) de classe C^p ($p\in\mathbb{N}^*$) sur un intervalle

Pour montrer qu'une fonction f définie sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est de classe C^p ($p\in\mathbb{N}^*$) sur $[a, b]$ (avec "problème en a"), on peut :

■ **Option A** : utiliser la définition en montrant successivement que :
– f est dérivable sur $]a, b]$.,
– f est **dérivable** en a, et déterminer f'(a),
– une fois f'(a) déterminé, former le taux d'accroissements de f',
– montrer alors que ce taux d'accroissements admet lui-même une limite finie (!), et déterminer f''(a),
– former ainsi le taux d'accroissements de f'' (!!), puis déterminer sa limite (!!!)
– ...
– continuer ce petit jeu jusqu'au rang p (!!!!) _ce qui, si p n'est pas connu, va nécessiter une récurrence pour le moins désagréable (!!!!!),

■ **Option B** : utiliser le théorème de prolongement des fonctions de classe C^p, en montrant successivement que :
– f est de classe C^p sur $]a, b]$.,
– f est **continue** en a,
– $f^{(p)}$ admet une limite fine en a (NB : il n'est pas nécessaire de calculer la limite de toutes les dérivées précédentes, la $p^{\text{-ème}}$ suffit).

Après cette description détaillée, est-il encore nécessaire de préciser que l'option A est à bannir de façon absolue et définitive ? Bien évidemment, **l'option B doit être utilisée** dans 100 % des cas.

5. Montrer qu'une fonction est de classe C^∞ /D^∞

Pour montrer qu'une fonction f est de classe C^∞ ou D^∞ (ce qui est équivalent) sur un intervalle I, on peut :

■ montrer que f est, pour tout entier n, de classe C^n ou de classe D^n sur I,

■ montrer que f est développable en série entière sur I (hors-programme en première année, cf. chapitre "**Séries entières**"), c'est-à-dire déterminer une série entière qui coïncide avec f sur I.

VI. Montrer qu'une fonction est uniformément continue sur un intervalle

Pour montrer qu'une fonction f définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est uniformément continue sur I, on peut :

■ si I est un intervalle compact (i.e. un segment), conclure directement à l'aide du théorème de Heine,

■ s'assurer préalablement que f est continue sur I (condition nécessaire mais non suffisante),

■ evenir à la définition en montrant que :
$\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0, \forall(x, x')\in\mathcal{D}_f^2, (|x - x'| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$ ou $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon)$,

■ montrer que f est lipschitzienne (condition suffisante mais non nécessaire, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, par exemple, étant uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ sans être lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$) et conclure à l'aide de la définition.

VII. Déterminer un encadrement d'une fonction, de sa limite

1. A l'aide d'inégalités de convexité

Penser que si une fonction f à valeurs réelles de classe C^1 est convexe (resp. concave) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, sa courbe représentative sur I est "au dessus" (resp. "en dessous") de ses tangentes et "en dessous" (resp. "au dessus") de ses cordes. Cette propriété des fonctions convexes et concaves permet, dans certains cas, d'obtenir un encadrement de f par des fonctions affines. On notera en particulier quelques inégalités de convexité usuelles parmi d'autres, **à savoir redémontrer** :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq x+1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+,\ \ln(1+x) \leq x$$

$$\forall x \in [1, +\infty[,\ \ln x \leq x-1 \qquad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x.$$

☞ Voir l'exercice "Inégalités fonctionnelles".

2. A l'aide de l'inégalité des accroissements finis

3. A l'aide des formules de Taylor (voir le chapitre "Formules de Taylor. Développements limités")

4. A l'aide d'une étude de fonctions

La méthode consistant à effectuer une étude de fonctions pour montrer une inégalité fonctionnelle est celle avec laquelle les candidats sont le plus à l'aise. Attention cepdendant : ce n'est pas toujours la méthode la plus simple ni la plus rapide. Il faut donc d'abord se demander si on ne peut pas utiliser une inégalité de convexité, ou une formule de Taylor.

5. Déterminer un majorant ou un minorant de la limite d'une fonction

Penser que, pour utiliser le théorème de prolongement des inégalités, il faut prouver au préalable que toutes les fonctions en présence dans l'inégalité admettent une limite. **On obtient alors une inégalité large** donnant un minorant, un majorant, ou un encadrement de la limite de la fonction.

VIII. Prouver qu'une fonction induit une bijection

1. A l'aide de la définition

2. A l'aide des variations de la fonction

Penser que, si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors f réalise une bijection de I sur f(I) et f(I) est un intervalle (théorème dit "de la bijection").

IX. Déterminer le nombre de solutions d'une équation

1. Prouver qu'une fonction admet au moins un zéro

Pour montrer qu'une fonction f admet au moins un zéro sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on peut :

■ si f est continue sur I, **déterminer f(I)** puis montrer que 0 appartient à I,

■ si f est continue sur une partie]a, b[de I, montrer que f(a) (ou limite de f en a) et f(b) (ou limite de f en b) sont de signes opposés puis utiliser le **théorème des valeurs intermédiaires**,

- si f est la dérivée d'une fonction continue sur [a, b] et dérivable sur]a, b[(a et b appartenant à I, avec a < b), utiliser le **théorème de Rolle**.

Attention, par ces méthodes, on ne montre en aucun cas l'unicité du zéro de f.

2. Montrer qu'une équation admet une unique solution

Pour montrer qu'une équation de la forme $f(x) = a$ admet une unique solution x dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, on peut **montrer que f réalise une bijection de I sur f(I) et que a appartient à f(I)** (en utilisant, éventuellement, le théorème des valeurs intermédiaires). On peut également, pour plus de simplicité, considérer l'équation $g(x) = 0$, où g est la fonction définie par : $\forall x \in I,\ g(x) = f(x) - a$ et se ramener au point précédent.

3. Déterminer le nombre de solutions d'une équation

Pour déterminer le nombre de solution d'une équation de la forme $f(x) = a$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on peut, si f est continue sur I, **étudier les variations de f sur I** puis, sur chacun des **intervalles sur lesquels f est strictement monotone**, se référer au point précédent.

X. Etudier la bijection réciproque d'une fonction

1. Monotonie

Se souvenir que la bijection réciproque d'une fonction f bijective de I sur J a la même monotonie sur J que f sur I.

2. Continuité, dérivabilité

Se souvenir que la bijection réciproque d'une fonction f bijective de I sur J est continue sur J.

3. Dérivabilité

Se souvenir que la bijection réciproque d'une fonction f bijective de I sur J n'est pas toujours dérivable sur J, même si f est dérivable sur I. f^{-1} est dérivable uniquement aux points de I où f' ne s'annule pas, et on a alors : $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

☞ Voir le chapitre "**Fonctions usuelles**" pour des exemples de calcul de dérivées de fonctions réciproques.

3. Graphe

Se souvenir que si f est bijective, le graphe de f^{-1} s'obtient (dans un repère orthonormal) à partir de celui de f par la symétrie par rapport à la première bissectrice (i.e. la droite d'équation $y = x$).

4. Détermination de la fonction réciproque

Si f est bijective de I dans J, on peut parfois déterminer l'expression de f^{-1} à partir de l'égalité : $f(x) = y$ ($x \in I$, $y \in J$) en exprimant x en fonction de y ($x = f^{-1}(y)$), en général en raisonnant par équivalence. Cependant, il arrive qu'on ne puisse pas trouver d'expression simple de f^{-1}.

XI. Prouver qu'une fonction est convexe, concave

1. Si la fonction est de classe C^1

Penser qu'une fonction f de classe C^1 sur I est convexe (resp. concave) sur I si f' est croissante (resp. décroissante) sur I.

2. Si la fonction est de classe C^2

Penser qu'une fonction f de classe C^2 sur I est convexe (resp. concave) sur I si sa dérivée seconde est positive (resp. négative) sur I.

3. A l'aide de la définition

La définition est généralement utilisée dans les exercices plutôt théoriques. Elle a l'avantage de ne nécessiter aucune hypothèse sur la dérivabilité de f. L'extension de la définition à n points (inégalité de Jensen) est à la limite du programme, à savoir redémontrer.

☞ Voir l'exercice "**Inégalité de Jensen**".

XII. Représenter graphiquement une fonction

Afin de donner une allure réellement précise de la courbe représentative d'une fonction, il est peut être utile, lorsque l'étude est simple, d'étudier les points suivants :

1. Tangentes

Penser que, si f est dérivable en a, f'(a) est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f en (a, f(a)), et que, si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$, alors la courbe représentative de f admet une tangente verticale en (a, f(a)).

2. Eléments de symétrie

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. Se souvenir que :

- si, pour tout $x \in I$, $(2a - x) \in I$ et : $\forall x \in I$, $f(2a - x) = f(x)$, alors la courbe représentative de f dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe d'équation x = a.
- si, pour tout $x \in I$, $(2a - x) \in I$ et : $\forall x \in I$, $f(2a - x) = 2b - f(x)$, (ou si $\forall x \in I$, $f(a - x) - b = b - f(x)$), la courbe représentative de f dans un repère orthogonal est symétrique par rapport au point de coordonnées (a, b).

3. Convexité et points d'inflexion

Penser que, si f est de classe C^2 sur I et si $\forall x \in \mathring{I}$, $f''(x) \geq 0$, alors f est convexe sur I et :

- sa courbe représentative est "au-dessus" de chacune de ses tangentes,
- sa courbe représentative est "en-dessous" de chacune des cordes qu'elle sous-tend.

Penser que, si f est de classe C^1 sur I et si f' est croissante sur I alors f est convexe sur I et :

- sa courbe représentative est "au-dessus" de chacune de ses tangentes,
- sa courbe représentative est "en-dessous" de chacune des cordes qu'elle sous-tend.

Penser que, si f est de classe C^2 sur I, la courbe représentative de f présente un point d'inflexion en (a, f(a)) (changement de convexité) si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en a.

4. Branches infinies

Soit f une fonction, et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Penser que :

- Si $\lim\limits_{b^\pm} f = \pm\infty$ ($b \in \mathbb{R}$), $\mathscr{C}_f$ admet une *asymptote verticale d'équation x = b* (**par exemple** $x \mapsto \frac{1}{x}$ **en 0**),
- Si $\lim\limits_{\pm\infty} f = b$ ($b \in \mathbb{R}$), $\mathscr{C}_f$ admet une *asymptote horizontale d'équation y = b* (**par exemple** $x \mapsto \frac{1}{x}$ **en** $+\infty$),
- Si $\lim\limits_{\pm\infty} f = \pm\infty$,
  - si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, $\mathscr{C}_f$ admet une *branche parabolique verticale* (**par exemple exp en** $+\infty$),

- si $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, $\mathscr{C}_f$ admet une *branche parabolique horizontale* **(par exemple ln en $+\infty$)**.
- si $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \in \mathbb{R}^*$), il faut étudier la fonction $x \mapsto f(x) - ax$,

  – si $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax) = b$ ($b \in \mathbb{R}$), la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ **(c'est le cas si $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ avec ε de limite nulle en $\pm\infty$)**,

  – si $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$, $\mathscr{C}_f$ admet une *branche parabolique* de direction la droite d'équation $y = ax$,

  – si $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ et $x \mapsto f(x) - ax$ n'ont pas de limite en $\pm\infty$, $\mathscr{C}_f$ n'admet ni asymptote ni branche parabolique.