Chapitre 12. Fonctions usuelles

Maths SUP

OPTIMAL *SUP-SPE*

Fiche de cours

I. Fonctions partie entière, valeur absolue, sup et inf

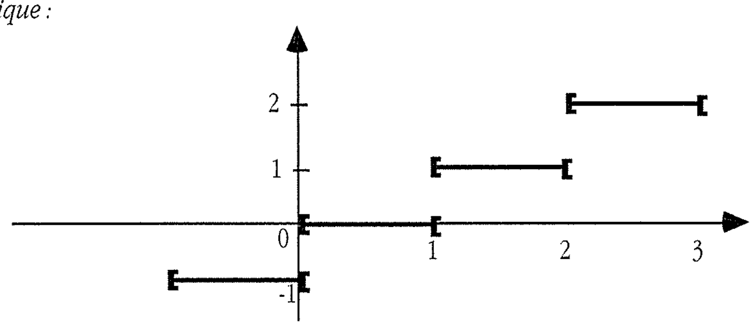
▪ ***Fonction partie entière.*** On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction partie entière qui à tout réel x associe le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x, et on la note $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ ou $x \mapsto \text{Ent}(x)$, ou $x \mapsto E(x)$, ou $x \mapsto [x]$.

Propriétés :

• $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \\ x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \end{cases}$,

• La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$ et est continue à gauche en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Représentation graphique :



▪ ***Fonction valeur absolue.*** On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction valeur absolue, notée $x \mapsto |x|$, par :

$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \text{si } x \leq 0, |x| = -x \\ \text{si } x \geq 0, |x| = x \end{cases}$.

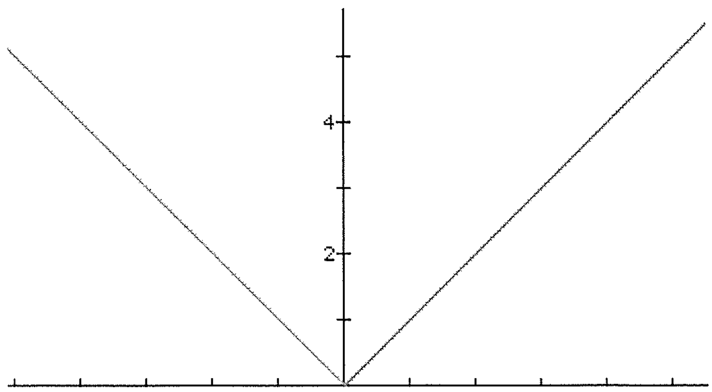
Propriétés :

La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$&.

• $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = \max(x, 0) + \max(-x, 0)$.

• $\max(a, b) = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$.

Représentation graphique :



■ ***Fonction*** $|f|$. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. On définit sur I la fonction $|f|$ par : $x \mapsto |f(x)|$.

Propriété :

• Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans I. Si f est continue sur J, alors $|f|$ est continue sur J.

■ ***Fonctions sup(f, g) et inf(f, g) (à la limite du programme).*** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur I. On note sup(f, g) et inf(f, g) les fonctions définies sur I par :

$$\forall x \in I, \begin{cases} (\sup(f, g))(x) = \sup(f(x), g(x)) \\ (\inf(f, g))(x) = \inf(f(x), g(x)) \end{cases}.$$

Propriété : soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans I et non réduit à un point. Si f et g sont continues sur J, alors sup(f, g) et inf(f, g) sont continues sur J.

II. Fonctions ln, exp et puissances

1. Fonction exp

La fonction exp est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$. C'est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x)f(y)$ et $f(0) = 1$. Elle est également notée : $x \mapsto e^x$.

Propriétés :

• La fonction exp est continue, dérivable, strictement croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

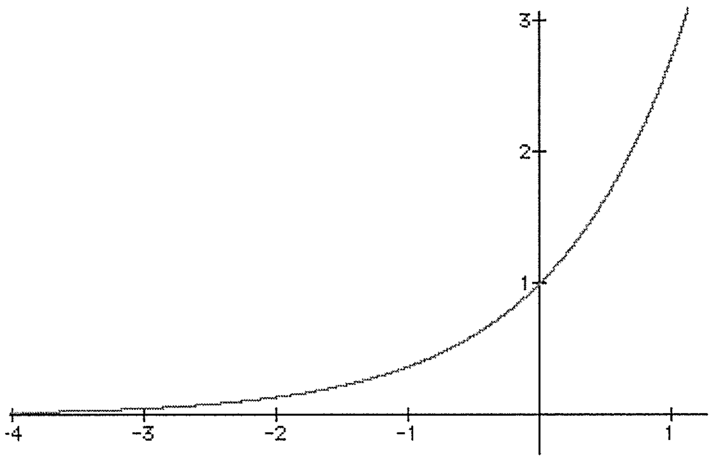
• $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $e^{a+b} = e^a e^b$.

• $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(e^a)^b = (e^b)^a = e^{ab}$.

• $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp' x = \exp x$.

• Lorsque h est au voisinage de 0 : $e^h = 1 + h + h\varepsilon(h)$ avec ε tendant vers 0 en 0 (approximation affine).

Représentation graphique :



Le graphe de exp admet une asymptote horizontale en $-\infty$ et une branche parabolique verticale en $+\infty$.

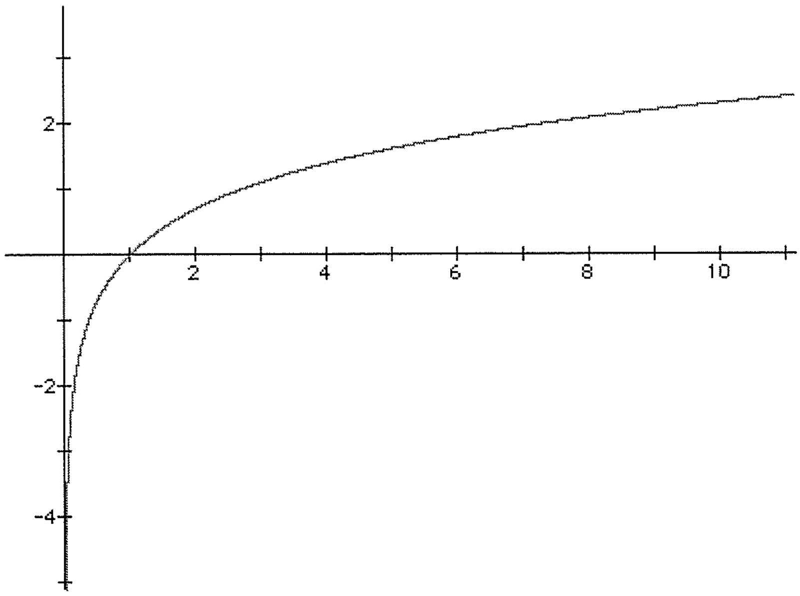
2. Fonction ln

La fonction ln est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ comme l'unique primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ s'annulant en 1. C'est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1 telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, $f(xy) = f(x) + f(y)$.

Propriétés :

- La fonction ln est continue, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\ln 1 = 0$.
- $\forall(a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.
- $\forall(a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.
- La fonction ln est la réciproque de la fonction exp. On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp(x)) = x$, et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\exp(\ln x) = x$.
- Lorsque h est au voisinage de 0 : $\ln(1 + h) = h + h\varepsilon(h)$ avec ε tendant vers 0 en 0 (approximation affine).

Représentation graphique :



Le graphe de ln admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale en $-\infty$ et une branche parabolique horizontale en $+\infty$.

3. Fonctions puissances

On appelle fonctions puissances, et l'on note $x \mapsto x^\alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$), les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $x \mapsto e^{\alpha \ln x}$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$).

Propriétés :

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$.
- $\forall(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

Remarque : Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $x \mapsto x^\alpha$. La fonction f_α admet en 0 une limite finie (on dit que f_α est prolongeable par continuité en 0), égale à 0. La fonction g_α définie sur $\mathbb{R}^+$ par $x \mapsto \begin{cases} x^\alpha & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est alors le prolongement par continuité de f_α, et cette fonction g_α est alors définie sur $\mathbb{R}$.

Notation : $0^0 = 1$.

III. Fonctions trigonométriques circulaires

1. Dérivées

Les fonctions sin, cos et tan sont dérivables sur leur domaine de définition et on a :

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos x$,
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin x$,
- $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

2. Fonctions circulaires d'un même arc

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad 1 + \operatorname{cotan}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

3. Arcs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$

4. Arcs associés

$\sin(-x) = -\sin x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
$\cos(-x) = \cos x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
$\tan(-x) = -\tan x$	$\tan(\pi - x) = -\tan x$	$\tan(\pi + x) = \tan x$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cotan} x$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{cotan} x$

5. Formules d'addition

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \qquad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \qquad \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

6. Formules de duplication

- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$= 2\cos^2 x - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2 x$$

- $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

7. Propriétés de la tangente de l'arc moitié t = tan(x/2)

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

8. Transformation de sommes en produits

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

9. Transformation de produits en sommes

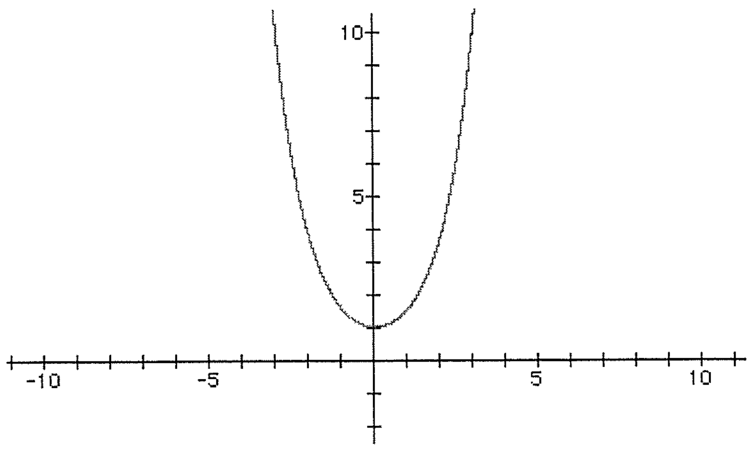
$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$
$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$
$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$$

IV. Fonctions trigonométriques hyperboliques

1. Définitions

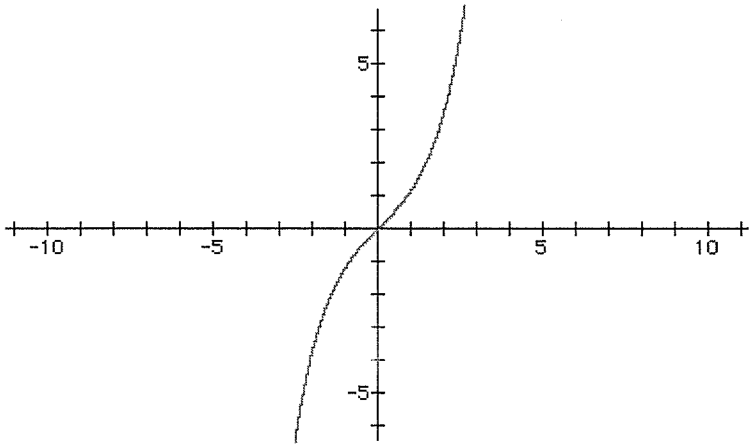
▪ On appelle cosinus hyperbolique, et on note ch, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}\, x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Représentation graphique :



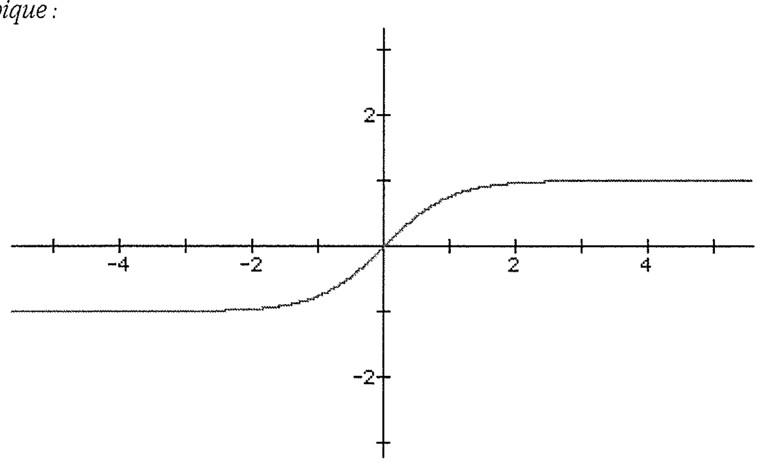
■ On appelle sinus hyperbolique, et on note sh, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{sh}\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Représentation graphique :



■ On appelle tangente hyperbolique, et on note th, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{th}\, x = \dfrac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Représentation graphique :



2. Dérivées

- La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{sh}' x = \text{ch}\, x$,
- La fonction ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}' x = \text{sh}\, x$,
- La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{th}' x = 1 - \text{th}^2 x = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x}$.

3. Formule fondamentale de trigonométrie hyperbolique (à connaître)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$$

4. Formules de trigonométrie hyperbolique (hors-programme, à savoir redémontrer)

a. Formules d'addition

$$\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sha}\,\mathrm{chb} + \mathrm{cha}\,\mathrm{shb} \qquad \mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sha}\,\mathrm{chb} - \mathrm{cha}\,\mathrm{shb}$$

$$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{cha}\,\mathrm{chb} + \mathrm{sha}\,\mathrm{shb} \qquad \mathrm{ch}(a-b) = \mathrm{cha}\,\mathrm{chb} - \mathrm{sha}\,\mathrm{shb}$$

$$\mathrm{th}(a+b) = \frac{\mathrm{tha} + \mathrm{thb}}{1 + \mathrm{tha}\,\mathrm{thb}} \qquad \mathrm{th}(a-b) = \frac{\mathrm{tha} - \mathrm{thb}}{1 - \mathrm{tha}\,\mathrm{thb}}$$

b. Formules de duplication

- $\mathrm{sh}\,2x = 2\,\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}x$
- $\mathrm{ch}\,2x = \mathrm{ch}^2x + \mathrm{sh}^2x$
  $= 2\,\mathrm{ch}^2x - 1$
  $= 1 + 2\,\mathrm{sh}^2x$
- $\mathrm{th}\,2x = \dfrac{2\,\mathrm{th}x}{1 + \mathrm{th}^2x}$

c. Propriétés de la tangente hyperbolique de l'arc moitié $t = \mathrm{th}\,(x/2)$

$$\mathrm{sh}x = \frac{2t}{1-t^2} \qquad \mathrm{ch}x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \qquad \mathrm{th}x = \frac{2t}{1+t^2}$$

d. Transformation de sommes en produits

$$\mathrm{ch}p + \mathrm{ch}q = 2\,\mathrm{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \mathrm{ch}p - \mathrm{ch}q = 2\,\mathrm{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\mathrm{sh}p + \mathrm{sh}q = 2\,\mathrm{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \mathrm{sh}p - \mathrm{sh}q = 2\,\mathrm{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

e. Transformation de produits en sommes

$$\mathrm{sha}\,\mathrm{shb} = \frac{1}{2}\,(\mathrm{ch}(a+b) - \mathrm{ch}(a-b))$$

$$\mathrm{cha}\,\mathrm{chb} = \frac{1}{2}\,(\mathrm{ch}(a+b) + \mathrm{ch}(a-b))$$

$$\mathrm{cha}\,\mathrm{shb} = \frac{1}{2}\,(\mathrm{sh}(a+b) - \mathrm{sh}(a-b))$$

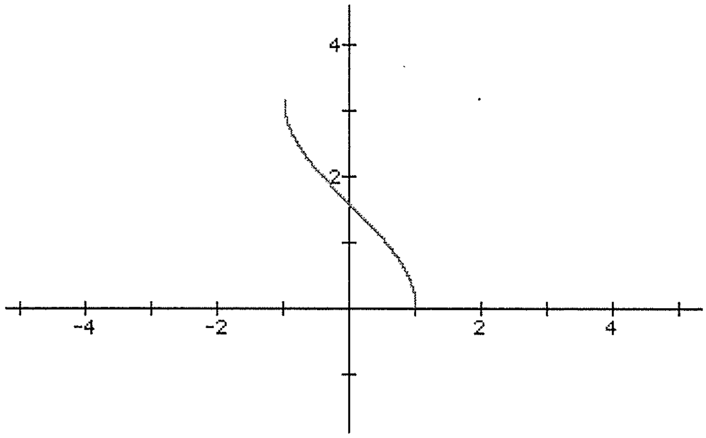
V. Fonctions trigonométriques réciproques

1. Définitions

■ ***Cas des fonctions trigonométriques circulaires.***

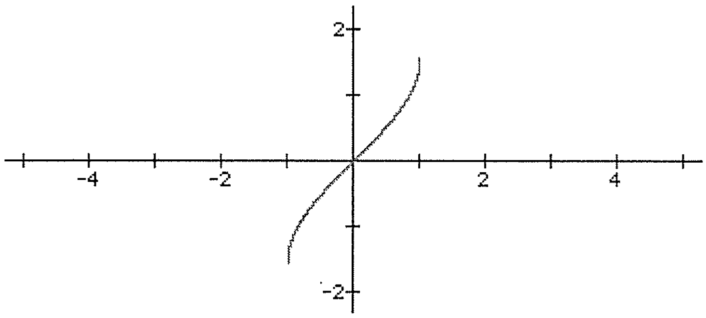
· ***Arccos.*** La fonction cos réalise une bijection décroissante de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$ et sa bijection réciproque, définie sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $[0, \pi]$, est appelée fonction arc cosinus et est notée Arccos.

Représentation graphique :



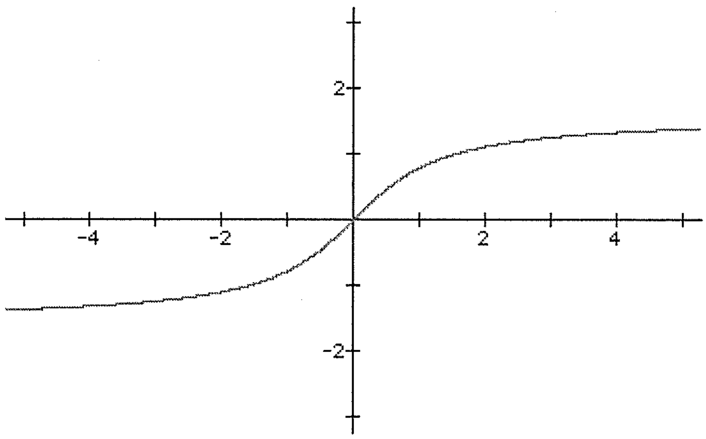
• ***Arcsin.*** La fonction sin réalise une bijection croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur [-1, 1] et sa bijection réciproque, définie sur [-1, 1] et à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, est appelée fonction arc sinus et est notée Arcsin.

Représentation graphique :



• ***Arctan.*** La fonction tan réalise une bijection croissante de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$ et sa bijection réciproque, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, est appelée fonction arc tangente et est notée Arctan.

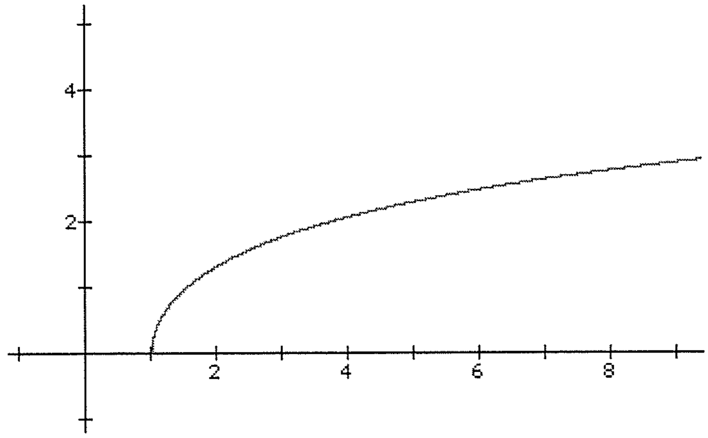
Représentation graphique :



■ ***Cas des fonctions trigonométriques hyperboliques (hors-programme)***

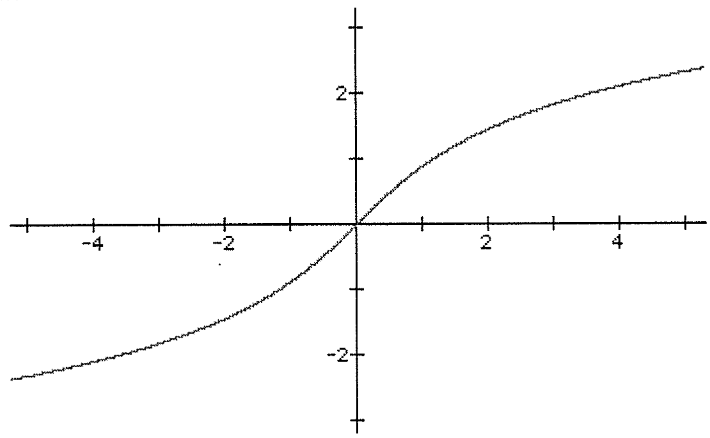
• ***Argch.*** La fonction ch réalise une bijection croissante de $\mathbb{R}^+$ sur $[1, +\infty[$ et sa bijection réciproque, définie sur $[1, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, est appelée fonction argument cosinus hyperbolique et est notée Argch.

Représentation graphique :



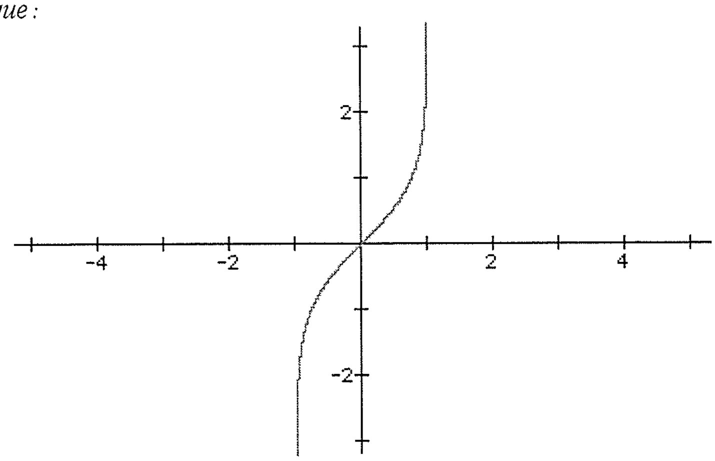
· ***Argsh.*** La fonction sh réalise une bijection croissante de ℝ sur ℝ et sa bijection réciproque, définie sur ℝ et à valeurs dans ℝ, est appelée fonction argument sinus hyperbolique et est notée Argsh.

Représentation graphique :



· ***Argth.*** La fonction th réalise une bijection croissante de ℝ sur]-1, 1[et sa bijection réciproque, définie sur]-1, 1[et à valeurs dans ℝ, est appelée fonction argument tangente hyperbolique et est notée Argth.

Représentation graphique :



2. Dérivées des fonctions trigonométriques réciproques

■ ***Cas des fonctions trigonométriques circulaires.***

- La fonction Arccos est dérivable sur $]-1, 1[$ et on a : $\forall x \in]-1, 1[$, $\text{Arccos}'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- La fonction Arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et on a : $\forall x \in]-1, 1[$, $\text{Arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

■ ***Cas des fonctions trigonométriques hyperboliques (hors-programme).***

- La fonction Argch est dérivable sur $]1, +\infty[$ et on a : $\forall x \in]1, +\infty[$, $\text{Argch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
- La fonction Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{Argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- La fonction Argth est dérivable sur $]-1, 1[$ et on a : $\forall x \in]-1, 1[$, $\text{Argth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

3. Composée des fonctions trigonométriques circulaires avec leurs réciproques (hors-programme)

	Arccos x	Arcsin x	Arctan x
cos ...	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
sin ...	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
tan ...	$\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	x

Lecture : sous réserve d'existence : $\tan(\text{Arcsin}\, x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

4. Expression logarithmique des fonctions trigonométriques hyperboliques réciproques (hors-programme)

$$\text{Argch}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad \text{Argsh}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad \text{Argth}\, x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

VI. Programme officiel

Hors programme :

- Formules de trigonométrie hyperboliques autres que $\text{ch}^2x - \text{sh}^2x = 1$ ($x \in \mathbb{R}$).

A la limite du programme :

- Les fonctions Argch, Argsh et Argth.

Chapitre 12. Fonctions usuelles

Maths SUP

OPTIMAL *SUP-SPE*

Fiche méthodologique

0. Apprendre son cours

Il est demandé aux élèves de bien maitriser ce chapitre. Il faut connaître toutes les fonctions présentées, leur ensemble de définition, l'expression de leur fonction dérivée (si elle existe), leurs variations, leur graphe et leur bijection réciproque lorsqu'elle exite (voir la fiche de cours qui reprend tous ces éléments). Les formules de trigonométrie les plus importantes sont à connaître par coeur ; il peut également être utile d'apprendre par coeur les autres, bien qu'elles puissent souvent se retrouver assez facilement (notamment à l'aide de nombres complexes, voir la fiche méthodologique "**Préliminaires**").. Peu de cadeaux sont fait aux étudiants (notamment à l'oral) s'ils montrent des lacunes dans ce chapitre, et les formules de trigonométrie interviennent dans de nombreux exercices. et problèmes.

Par ailleurs, il faut savoir que les notions vues dans ce chapitre sont rarement utilisées pour elles-mêmes mais sont très utiles dans d'autres chapitres : formules de trigonométrie pour la physique, expression de dérivées pour l'intégration, etc.

I. Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction composée

Pour déterminer l'ensemble de définition K d'une fonction réelle h du type $h = f \circ g$, où f est une fonction définie sur I et où g est une fonction définie sur J, on peut :

– montrer que : $g(J) \subset I$,car lorsque c'est le cas, l'ensemble de définition de h est alors : $K = J$,

– déterminer l'ensemble des éléments x de J tels que $g(x) \in I$ (plus formellement : rechercher l'ensemble : $g^{-1}(I) \cap J$) car cela permet de trouver l'ensemble des éléments où g est définie et dont l'image par g appartient à I.

☞ Voir l'exercice "Calcul de nombres liés aux fonctions circulaires réciproques".

II. Calculer un nombre du type : Arccos (cos a), Argch (ch a), etc.

Attention : contrairement aux apparences, Arccos (cos a) n'est pas toujours égal à a ! En effet, les fonctions circulaires réciproques (et il en est de même pour la fonction Argch) ne sont pas bijectives sur leur ensemble de définition. Ainsi, la fonction Arccos (par exemple) n'est pas la bijection réciproque de la fonction cosinus, mais la bijection réciproque de sa restriction à un certain ensemble de référence, choisi de façon arbitraire ($[0, \pi]$ pour la fonction cosinus, , $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ pour la fonction sinus, etc : voir la fiche de cours).

Ainsi, pour calculer un nombre du type : Arccos (cos a), où $a \in \mathbb{R}$, deux cas se présesntent :

– si a appartient à l'ensemble de référence de la fonction circulaire ($[0, \pi]$ pour la fonction cosinus), alors le résultat est direct (dans l'exemple : Arccos (cos a) = a),

– si a n'appartient pas à l'ensemble de référence, il faut alors déterminer un élément b appartenant à l'ensemble de référence tel que cos a = cos b, et on a alors : Arccos (cos a) = Arccos (cos b), ce qui permet de conclure, comme b appartient à l'ensemble de référence, que : Arccos (cos a) = b.

Précisons que la notation $f^{-1}(f(a))$ (à la différence d'une notation du type : $f^{-1}(\{f(a)\})$, voir le chapitre "**Préliminaires**") suppose que f soit bijective, d'un ensemble I vers un ensemble J.

☞ Voir la fiche de cours pour les ensembles de définition des fonctions circulaires réciproques, et l'exercice "Calcul de nombres liés aux fonctions circulaires réciproques".

III. Calculer la dérivée de la réciproque d'une fonction trigonométrique circulaire ou hyperbolique

Attention : bien qu'elles soient indiquées dans la fiche de cours à titre indicatif, les dérivées des fonctions hyperboliques ne sont officiellement pas au programme : il faut donc redémontrer ces formules. En revanche, les dérivées des fonctions circulaires réciproques peuvent être utilisées directement. Il peut toutefois être utile de savoir les retrouver.

Pour calculer la dérivée $(f^{-1})'$ de la réciproque d'une fonction f bijective d'un intervalle I sur J, on peut :

– (étape 1) considérer un élément y quelconque de J et immédiatement introduire l'unique élément x de I tel que $f(x) = y$,

– (étape 2) utiliser la relation $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ et la relation $f(x) = y$, en écrivant : $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ (par exemple : $\text{Arccos}'(y) = \frac{1}{\cos'(x)}$),

– (étape 3) exprimer $f'(x)$ en fonction de y, ce qui suppose en réalité d'exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$ (par exemple : $\cos' x = -\sin x = -\sqrt{1-\cos^2 x} = -\sqrt{1-y^2}$), puis conclure en remettant le quantif sur y ($\forall y \in [-1, 1]$, $\text{Arccos}'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$).

Ce calcul est particulièrement facile à réaliser dans les cas des fonctions trigonométriques circulaires et hyperboliques puisque leurs dérivées s'expiment en fonction d'autres fonctions trigonométriques. Avec les formules de trigonométrie, on peut alors réaliser "l'étape 3" faciliment.

☞ Voir la fiche de cours et l'exercice "Expression logarithmique des fonctions Argch, Arghsh et Argth".

IV. Déterminer l'expression d'une fonction du type $x \mapsto \cos(\text{Arcsin}\, x)$, $x \mapsto \text{ch}(\text{Argsh}\, x)$, etc.

Pour déterminer l'expression d'une fonction du type $x \mapsto \cos(\text{Arcsin}\, x)$ (où x appartient à l'ensemble de définition de la fonction Arcsin, soit ici [-1, 1]) on peut **successivement** :

– exprimer la fonction cosinus en fonction de sinus avec : $\forall y \in \mathbb{R}$, $\cos(y) = \sqrt{1-\sin^2 y}$,

– utiliser la relation : $\forall x \in [-1, 1]$, $\sin(\text{Arcsin}\, x) = x$,

– conclure : $\forall x \in [-1, 1]$, $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

☞ Voir les exercices "Calcul de nombres liés aux fonctions circulaires réciproques", "Expressions logarithmique des fonctions Argch, Argsh et Argth".

V. Etablir une relation entre des fonctions trigonométriques, résoudre une équation faisant intervenir des fonctions trigonométriques

1. Etablir une relation entre des fonctions trigonométriques

Pour montrer une relation entre des fonctions trigonométriques, il faut généralement rassembler les deux membres de l'inégalité pour obtenir une équation du type : $\forall x \in I$, $f(x) = 0$, puis résoudre l'équation à l'aide d'une étude classique de fonctions.

☞ Voir l'exercice "Calculs de sommes liées à la fonction Arctan".

2. Résoudre une équation faisant intervenir des fonctions trigonométriques

☞ Voir l'exercice "Résolution d'équation".

VI. Calculer des sommes d'expressions trigonométriques

1. A l'aide des propriétés des nombres complexes

☞ Voir la fiche méthodologique du chapitre "**Nombres complexes**".

2. A l'aide de la formule du binôme

☞ Voir l'exercice "Calcul de $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}\,(a+kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}\,(a+kx)$".

3. En effectuant une somme téléscopique

☞ Voir l'exercice "Étude d'une suite de sommes partielles".