

# Chapitre 11. Suites

Maths SUP

**OPTIMAL SUP-SPE**

## Fiche de cours

Dans tout le cours,  $E$  désigne un ensemble quelconque.

### I. Généralités

■ Soient  $n_0 \in \mathbb{N}$  et  $I$  l'ensemble  $[n_0, +\infty[$ . On appelle suite d'éléments de  $E$ , toute application  $u : \begin{cases} I \rightarrow E \\ n \mapsto u_n = u(n) \end{cases}$ , notée  $(u_n)_{n \in I}$  ou  $(u_n)$  ou  $u$ .

■ On appelle suite réelle (resp. complexe) toute suite d'éléments de  $\mathbb{R}$  (resp. de  $\mathbb{C}$ ).

■ Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle,

- $u$  est majorée si :  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ .  $M$  est alors un majorant de cette suite,
- $u$  est minorée si :  $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$ .  $m$  est alors un minorant de cette suite,
- $u$  est bornée si  $u$  est à la fois majorée et minorée.

■ Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe,

- $u$  est bornée si :  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$ .

■ Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle,

- $u$  est croissante (resp. strictement croissante) si :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$  (resp. si :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$ ),
- $u$  est décroissante (resp. strictement décroissante) si :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$  (resp. si :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$ ),
- $u$  est monotone (resp. strictement monotone) si  $u$  est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante),
- $u$  est constante si :  $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha$ ,
- $u$  est stationnaire si :  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}$ .

■ Soit  $u$  une suite complexe. On définit les suites  $\Re(u)$ ,  $\Im(u)$ ,  $|u|$  et  $\bar{u}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} (\Re(u))_n = \Re(u_n) \\ (\Im(u))_n = \Im(u_n) \\ |u|_n = |u_n| \\ \bar{u}_n = \overline{u_n} \end{cases}$$

Remarque : Les suites  $\Re(u)$ ,  $\Im(u)$  et  $|u|$  sont des suites réelles, et  $\bar{u}$  est une suite complexe.

### II. Convergence et divergence d'une suite

#### 1. Définitions

■ Soit  $u$  une suite réelle.  $u$  est une suite convergente si :  $\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon$  (ou  $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ ).  $\ell$  est alors l'unique limite de  $u$  et on note :  $\ell = \lim u$  ou :  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  (on dit que  $u$  converge ou tend vers  $\ell$ ).

■ **Extension au cas des suites complexes.** Soit  $u$  une suite complexe.  $u$  est une suite convergente si :  $\exists \ell \in \mathbb{C}, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon$  (ou  $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ ) (la notation  $| \cdot |$  désignant ici le module et non la valeur absolue).  $\ell$  est alors

l'unique limite de  $u$  et on note :  $\ell = \lim u$  ou :  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  (on dit que  $u$  converge ou tend vers  $\ell$ ). On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u = \ell \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} (\operatorname{Re}(u)) = \operatorname{Re}(\ell) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (\operatorname{Im}(u)) = \operatorname{Im}(\ell) \end{cases}$$

■ Une suite réelle ou complexe qui n'est pas convergente est dite divergente (une suite divergente tend vers  $\pm\infty$  ou n'a pas de limite).

■ **Limites infinies (limites dans  $\overline{\mathbb{R}}$ ).** Soit  $u$  une suite réelle,

- $u$  tend vers  $+\infty$  si :  $\forall A \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n > A$ ,
- $u$  tend vers  $-\infty$  si :  $\forall A \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n < -A$ .

## 2. Théorèmes de convergence

■ Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

■ Soient  $u$  une suite réelle convergente de limite  $\ell$  ( $\ell \in \mathbb{R}$ ),  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < \ell < b$ . On a alors :  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, a < u_n < b$ .

■ **Théorème de la limite monotone.** Toute suite réelle croissante à partir d'un certain rang et majorée (resp. décroissante à partir d'un certain rang et minorée) converge, et l'on a alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$  (resp.  $\inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$ ).

■ Toute suite croissante (à partir d'un certain rang) et non majorée tend vers  $+\infty$  et toute suite décroissante (à partir d'un certain rang) et non minorée tend vers  $-\infty$ .

■ Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point,  $u$  une suite réelle d'éléments de  $I$  qui tend vers une limite  $\alpha$  ( $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ ) et  $f$  une fonction définie sur  $I$ , admettant une limite  $\ell$  ( $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ) en  $\alpha$ . La suite  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $\ell$ .

■ Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point,  $f$  une fonction définie sur  $I$  telle que  $f(I) \subset I$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite réelle définie par  $u_0 \in I$  et par la relation de récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ . Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge de limite  $\ell$  et si  $\ell$  appartient à  $I$  (ou est une borne de  $I$ ) et si  $f$  est continue en  $\ell$  (resp. admet une limite finie en  $\ell$ ), alors  $\ell$  est solution de l'équation  $x = f(x)$  (resp.  $\ell = \lim_{x \rightarrow \ell} f(x)$ ). Si  $\ell \in I$ , on dit alors que  $\ell$  est un point fixe de  $f$ .

■ **Prolongement des inégalités (passage à la limite dans des inégalités).**

Soient  $u$  et  $v$  deux suites réelles telles que :  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \leq v_n$ .

- Si  $u$  et  $v$  sont convergentes, alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

■ **Existence d'une limite par encadrement (dit "théorème de l'encadrement").**

Soient  $u$ ,  $v$  et  $w$  trois suites réelles telles que  $u$  et  $w$  soient convergentes de limite  $\ell$  ( $\ell \in \mathbb{R}$ ). Si il existe un rang  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n \leq w_n$ , alors  $v$  converge de limite  $\ell$ .

*Conséquence* : le produit d'une suite réelle bornée et d'une suite réelle de limite nulle est une suite réelle de limite nulle.

## 3. Suites adjacentes

■ Deux suites réelles  $u$  et  $v$  sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et si :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ .

■ Par extension, on dira que deux suites réelles  $u$  et  $v$  sont adjacentes à partir d'un certain rang si l'une est croissante à partir d'un certain rang, si l'autre est décroissante à partir d'un certain rang et si :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ .

- **Propriété.** Deux suites adjacentes (ou adjacentes à partir d'un certain rang) convergent et admettent la même limite.

#### 4. Suites extraites

■ Soient  $u$  et  $v$  deux suites d'éléments de  $E$ . On dit que  $v$  est une suite extraite de la suite  $u$  s'il existe une application  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{N}$ , à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et strictement croissante, telle que :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$ .

■ **Propriétés.** Soit  $u$  une suite réelle. Si  $u$  est convergente de limite  $\ell$  ( $\ell \in \mathbb{R}$ ), alors toute suite extraite de  $u$  est convergente de limite  $\ell$ . Si  $u$  diverge vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ), alors toute suite extraite de  $u$  diverge vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ).

*Conséquence :* Si deux suites extraites de  $u$  admettent deux limites différentes, ou si une suite extraite de  $u$  n'a pas de limite, alors la suite  $u$  n'a pas de limite.

#### 5. Suites de Cauchy

- **Définition.** Soit  $u$  une suite réelle ou complexe. On dit que  $u$  est une suite de Cauchy si :
  - $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0, |u_m - u_n| < \varepsilon$  (ou  $|u_m - u_n| \leq \varepsilon$ ), ou, ce qui est équivalent :
  - $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}, |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$  (ou  $|u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon$ ).

- **Propriétés.**
  - Toute suite réelle ou complexe qui est une suite de Cauchy est bornée.
  - Soit  $u$  une suite réelle ou complexe.  $u$  est une suite convergente si, et seulement si,  $u$  est une suite de Cauchy.

■ **Cas des suites complexes.** Soit  $u$  une suite complexe.  $u$  est une suite de Cauchy si, et seulement si, les suites réelles  $\mathcal{R}e(u)$  et  $\mathcal{I}m(u)$  sont des suites de Cauchy.

#### 6. Théorème des segments emboîtés

- **Définitions.**
  - Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $a \leq b$ . On appelle longueur du segment  $[a, b]$ , et on note :  $\ell([a, b])$ , le nombre :  $b - a$
  - Soit  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de parties de  $\mathbb{R}$ . On dit que les parties  $I_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sont emboîtées si :  $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$ .
- **Théorème des segments emboîtés.** Soit  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de segments emboîtés et non vides. Si la suite  $(\ell(I_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0, alors :  $\exists \alpha \in \mathbb{R} / \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\alpha\}$ .

#### 7. Théorème de Bolzano-Weierstrass

Soit  $u$  une suite bornée réelle ou complexe. Alors il existe une suite  $v$  extraite de  $u$  convergente.

### III. Comparaison de suites

#### 1. Suite négligeable devant une autre

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est négligeable devant  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , et on note :  $u_n = o(v_n)$ , s'il existe une suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente de limite nulle et un rang  $n_0$  tels que :  $\forall n \geq n_0, u_n = \varepsilon_n v_n$ .

Si :  $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, v_n \neq 0$ , alors  $u$  est négligeable devant  $v$  si, et seulement si :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ .

*Propriétés :* Si  $u_n = o(v_n)$  et si  $w_n = o(t_n)$ , alors :

- $u_n w_n = o(v_n t_n)$ ,

- $\forall p \in \mathbb{N}^*, u_n^p = o(v_n^p)$ ,
- $\frac{u_n}{t_n} = o\left(\frac{v_n}{w_n}\right)$  (si  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \begin{cases} w_n \neq 0 \\ t_n \neq 0 \end{cases}$ ).

*Exemples usuels :*

- Si  $\alpha < \beta, n^\alpha = o(n^\beta)$ ,
- Si  $\alpha > 0$  (et  $\beta \in \mathbb{R}$ ),  $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$ ,
- Si  $a > 1$  (et  $\alpha \in \mathbb{R}$ ),  $n^\alpha = o(a^n)$ ,
- Si  $|a| < |b|, a^n = o(b^n)$ ,
- $\forall x \in \mathbb{R}, x^n = o(n!)$ .

## 2. Suite dominée par une autre

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dominée par  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , et on note :  $u_n = O(v_n)$ , s'il existe une suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bornée et un rang  $n_0$  tels que :  $\forall n \geq n_0, u_n = \alpha_n v_n$

Si :  $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, v_n \neq 0$ , alors  $u$  est dominée par  $v$  si, et seulement si, la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  est bornée.

*Propriétés :* Si, au voisinage de  $x_0 : u_n = O(v_n)$  et  $w_n = O(t_n)$ , alors :

- $u_n w_n = O(v_n t_n)$ ,
- $\forall p \in \mathbb{N}^*, u_n^p = O(v_n^p)$ .

## 3. Suites équivalentes

■ **Définition.**  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont équivalentes, et on note :  $u_n \sim v_n$ , s'il existe une suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente de limite 1 et un rang  $n_0$  tels que :  $\forall n \geq n_0, u_n = h_n v_n$ .

Si :  $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, v_n \neq 0$ , alors  $u$  et  $v$  sont équivalentes si, et seulement si :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ .

■ Si  $u_n \sim v_n$  et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  ( $\ell \in \mathbb{R}$  ou  $\ell = \pm\infty$ ), alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$  : deux suites équivalentes ont même limite (si celle-ci existe).

■  $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$ .

■ Si  $u_n \sim v_n$ , alors il existe un entier  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n$  et  $v_n$  soient de même signe.

*Propriétés :* Si  $u_n \sim v_n$  et si  $w_n \sim t_n$ , alors :

- $u_n w_n \sim v_n t_n$ ,
- $\forall p \in \mathbb{N}^*, u_n^p \sim v_n^p$  et si  $u$  et  $v$  ne s'annulent pas à partir d'un certain rang :  $\forall p \in \mathbb{Z}^*, u_n^p \sim v_n^p$ ,
- $\frac{u_n}{w_n} \sim \frac{v_n}{t_n}$  (si  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \begin{cases} w_n \neq 0 \\ t_n \neq 0 \end{cases}$ ).

*Exemples usuels :* Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ , on a :

- $\sin(u_n) \sim u_n$ ,
- $\cos(u_n) - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}$ ,
- $\tan(u_n) \sim u_n$ ,
- $\operatorname{ch} u_n - 1 \sim \frac{u_n^2}{2}$ ,
- $\operatorname{sh} u_n \sim u_n$ ,
- $\operatorname{th} u_n \sim u_n$ ,
- $\operatorname{Arcsin} u_n \sim u_n$ ,

- $\text{Arctan } u_n \sim u_n$ ,
- $\text{Argsh } u_n \sim u_n$ ,
- $\text{Argth } u_n \sim u_n$ ,
- $\text{Argch } (1 + u_n) \sim \sqrt{2u_n}$ ,
- $\ln(1 + u_n) \sim u_n$ ,
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$ ,
- $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ),
- Si  $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$  (avec  $a_p \neq 0$ ), alors :  $P(n) \sim a_p n^p$ .

## IV. Suites usuelles

### 1. Suites arithmétiques

- Soit  $u$  une suite réelle ou complexe.  $u$  est une suite arithmétique si :  $\exists r \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$ . On a alors :
  - $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, u_n = u_p + (n - p)r$ ,
  - $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$ ,
  - $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k = (n + 1) \left( \frac{u_0 + u_n}{2} \right) = (n + 1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2} r$ .
- Soit  $u$  une suite réelle ou complexe.  $u$  est arithmétique si, et seulement si :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + u_{n+2} = 2u_{n+1}$ .
- Soient  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . On dit que  $a, b$  et  $c$  sont en progression arithmétique s'il existe une suite réelle  $u$  arithmétique et un entier  $n_0$  tels que :  $u_{n_0} = a, u_{n_0+1} = b$  et  $u_{n_0+2} = c$ .
- Soient  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .  $a, b$  et  $c$  sont en progression arithmétique si, et seulement si :  $a + c = 2b$ .

### 2. Suites géométriques

- Soit  $u$  une suite réelle ou complexe.  $u$  est une suite géométrique si :  $\exists q \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$ . On a alors :
  - $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, p \leq n, u_n = q^{n-p} u_p$ ,
  - $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n u_0$ ,
  - $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k = \begin{cases} (n+1)u_0 & \text{si } q = 1 \\ u_0 \left( \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$
- Si  $q \neq 1$ , on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ .
- Soit  $u$  une suite réelle ou complexe.  $u$  est géométrique si, et seulement si :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n u_{n+2} = u_{n+1}^2$ .
- Soient  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . On dit que  $a, b$  et  $c$  sont en progression géométrique s'il existe une suite réelle  $u$  géométrique et un entier  $n_0$  tels que :  $u_{n_0} = a, u_{n_0+1} = b$  et  $u_{n_0+2} = c$ .
- Soient  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .  $a, b$  et  $c$  sont en progression géométrique si, et seulement si :  $ac = b^2$ .

### 3. Suites arithmético-géométriques

$u$  est une suite arithmético-géométrique si :  $\exists (a, b) \in \mathbb{C}^2, a \neq 1$  et  $b \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$ . En définissant  $c$  par :  $c = ac + b$  (i.e. :  $c = \frac{b}{1-a}$ ), on a alors :

- $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, p \leq n, u_n = (u_p - c)a^{n-p} + c,$
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (u_0 - c)a^n + c.$

### 4. Suites réelles vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$  et  $u$  la suite définie par les réels  $u_0, u_1$  et par la relation de récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ . L'équation caractéristique de la suite  $u$  est (E) :  $x^2 - ax - b = 0$  et admet  $\Delta = a^2 + 4b$  pour discriminant. Trois cas se présentent :

- Si  $\Delta > 0$ , alors (E) admet deux racines réelles distinctes  $x_1$  et  $x_2$ , et :  $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n,$
- Si  $\Delta = 0$ , alors (E) admet une racine double  $x_0$ , et :  $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n) x_0^n,$
- Si  $\Delta < 0$ , alors (E) admet deux racines complexes conjuguées  $re^{i\theta}$  et  $re^{-i\theta}$ , et :  
 $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)) r^n.$

*Remarque : dans chacun de ces cas, un tel couple  $(\lambda, \mu)$  est unique.*

### 5. Suites complexes vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2

Soient  $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par les nombres complexes  $u_0, u_1$  et par la relation de récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ . L'équation caractéristique de la suite  $u$  est (E) :  $x^2 - ax - b = 0$  et admet  $\Delta$  pour discriminant. Deux cas se présentent :

- Si  $\Delta \neq 0$ , alors (E) admet deux racines distinctes  $x_1$  et  $x_2$ , et :  $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n,$
- Si  $\Delta = 0$ , alors (E) admet une racine double  $x_0$ , et :  $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n) x_0^n.$

*Remarque : dans chacun de ces cas, un tel couple  $(\lambda, \mu)$  est unique.*

### 6. Sommes de Riemann

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $a < b$  et  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . On appelle sommes de Riemann (de pas régulier) associées à  $f$ , les suites  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \\ S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \end{cases}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*, s_n$  et  $S_n$  constituent des valeurs approchées de  $\int_a^b f(t) dt$  à  $\frac{b-a}{n} |f(b) - f(a)|$  près, et on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_a^b f(t) dt.$$

## V. Programme officiel

Hors programme :

- $\forall k \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$ .
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .
- $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ .
- Suites récurrentes linéaires d'ordre supérieur ou égal à 3.
- Théorème de Cesàro.

A la limite du programme :

- Toute suite croissante  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $\ell$  vérifie :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell$ .
- Composition d'équivalents (vérifiant les hypothèses).
- Lien entre les monotonies de la fonction  $f$  et de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  lorsque :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ .

# Chapitre 11. Suites

Maths SUP

**OPTIMAL SUP-SPE**

## Fiche méthodologique

Dans toute la fiche méthodologique, les suites considérées sont des suites numériques à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et  $n_0$  désigne un entier naturel fixé.

### 0. Apprendre et comprendre son cours

**Notation** : il y a deux façons de noter une suite. On peut écrire :

- la suite  $u$ ,
- la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , ou éventuellement la suite  $(u_n)$ .


**Attention** à ne pas écrire : « la suite  $u_n$  », car  $u_n$  ne désigne pas une suite, mais le terme général de la suite  $u$ , de rang  $n$ .

### 1. Expliciter le terme général d'une suite

#### 1. S'il s'agit d'une suite classique ou d'une combinaison simple de suites classiques

Pour déterminer une expression du terme général d'une suite  $u$ , on peut dans un premier temps chercher à se ramener, à l'aide d'opérations simples (somme, produit, quotient, application d'une fonction usuelle comme  $\ln$  par exemple), à une suite classique :

- suite arithmétique,
- suite géométrique,
- suite arithmético-géométrique,
- suite récurrente linéaire d'ordre 2.

 Voir les exercices "Suites usuelles", "Les incontournables".

#### 2. S'il s'agit d'une suite vérifiant une relation de la forme $u_{n+1} = u_n + f(n)$

Précisons tout d'abord ce qu'il ne faut pas faire : dire que  $u$  est une suite arithmétique. En effet, *a priori*, la quantité  $f(n)$  n'est pas indépendante de  $n$ .

Pour expliciter le terme général d'une suite vérifiant une équation de la forme :  $\forall n \geq n_0, u_{n+1} = u_n + f(n)$ , où  $f$  est une fonction à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , on peut **successivement** :

- former, pour tout entier  $k \geq n_0 - 1$ , la différence  $u_{k+1} - u_k$  (on obtient alors :  $\forall k \geq n_0 - 1, u_{k+1} - u_k = f(k)$ ),
- pour tout entier  $n \geq n_0$ , sommer la relation ainsi obtenue pour  $k$  allant de  $n_0 - 1$  à  $n - 1$  (ce qui permet d'obtenir ainsi :

$$\forall n \geq n_0, u_n - u_{n_0-1} = \sum_{k=n_0-1}^{n-1} f(k),$$

- conclure en ajoutant  $u_{n_0-1}$  membre à membre (on conclut ainsi :  $\forall n \geq n_0, u_n = \sum_{k=n_0-1}^{n-1} f(k) + u_{n_0-1}$ ).

#### 3. S'il s'agit d'une suite vérifiant une relation de la forme $u_{n+1} = au_n + f(n)$

Précisons tout d'abord ce qu'il ne faut pas faire : invoquer les résultats du cours sur les suites arithmético-géométriques. En effet, *a priori*, la quantité  $f(n)$  n'est pas indépendante de  $n$  et  $u$  n'est donc pas arithmético-géométrique.



Pour expliciter le terme général d'une suite vérifiant une équation de la forme :  $\forall n \geq n_0, u_{n+1} = au_n + f(n)$ , où  $f$  est une fonction à valeurs dans  $\mathbb{K}$  non constante sur  $[n_0, +\infty[$ , et où  $a \in \mathbb{K}^*$ , l'idée à mettre en oeuvre est de se ramener à une suite plus simple, par exemple à une suite de la forme du paragraphe précédent (voir point I.2 ci-dessus). Pour cela, on peut **successivement** :

- diviser, pour tout  $n \geq n_0$ , la relation de récurrence par  $a^{n+1} \neq 0$  (on obtient ainsi :  $\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{a^{n+1}} = \frac{u_n}{a^n} + \frac{f(n)}{a^{n+1}}$ ),
- appliquer la méthode précédente (voir point I.2 ci-dessus) à la suite  $\left(\frac{u_n}{a^n}\right)_{n \geq n_0}$ , ce qui permet d'en déterminer le terme général,
- conclure en multipliant le résultat obtenu par  $a^n$  ( $n \geq n_0$ ).

#### **4. S'il s'agit d'une suite vérifiant une relation de la forme $u_{n+1} = nu_n + b$ , ou plus généralement $u_{n+1} = nu_n + f(n)$**

Rappelons de nouveau ce qu'il ne faut pas faire : invoquer les résultats du cours sur les suites arithmético-géométriques. En effet, ici le facteur  $n$  devant  $u_n$  n'est pas une constante et  $u$  n'est donc pas arithmético-géométrique.

Pour expliciter le terme général d'une suite vérifiant une équation de la forme :  $\forall n \geq n_0, u_{n+1} = nu_n + f(n)$ , où  $f$  est une fonction à valeurs dans  $\mathbb{K}$  et où  $a \in \mathbb{K}^*$ , l'idée est de nouveau de se ramener à une suite plus simple, et plus précisément à une suite de la forme du paragraphe I.2 ci-dessus. Pour cela, on peut **successivement** :

- diviser, pour tout  $n \geq n_0$ , la relation de récurrence par  $n! \neq 0$  (on obtient ainsi :  $\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{n!} = \frac{u_n}{(n-1)!} + \frac{f(n)}{n!}$ ),
- appliquer la méthode du point I.2 ci-dessus à la suite  $\left(\frac{u_n}{(n-1)!}\right)_{n \geq n_0}$ , ce qui permet de déterminer son terme général,
- conclure en multipliant le résultat obtenu par  $(n-1)!$  ( $n \geq n_0$ ).

#### **5. S'il s'agit d'une suite vérifiant une relation de la forme $u_{n+1} = anu_n + b$ , ou plus généralement $u_{n+1} = anu_n + f(n)$**

Rappelons une dernière fois ce qu'il ne faut pas faire : invoquer les résultats du cours sur les suites arithmético-géométriques. En effet, ici le facteur  $an$  devant  $u_n$  n'est pas une constante et  $u$  n'est donc pas arithmético-géométrique.

Pour expliciter le terme général d'une suite vérifiant une équation de la forme :  $\forall n \geq n_0, u_{n+1} = anu_n + f(n)$ , où  $f$  est une fonction à valeurs dans  $\mathbb{K}$  et où  $a \in \mathbb{K}^*$ , l'idée est de combiner les méthodes des points I.2, I.3 et I.4 ci-dessus. Pour cela, on peut **successivement** :

- diviser, pour tout  $n \geq n_0$ , la relation de récurrence par  $a^{n+1}(n!) \neq 0$  (on obtient ainsi pour tout entier naturel  $n \geq n_0$  :  $\frac{u_{n+1}}{a^{n+1}n!} = \frac{u_n}{a^n(n-1)!} + \frac{f(n)}{a^{n+1}n!}$ ),
- appliquer la méthode du point I.2 ci-dessus à la suite  $\left(\frac{u_n}{a^n(n-1)!}\right)_{n \geq n_0}$ , ce qui permet de déterminer son terme général,
- conclure en multipliant le résultat obtenu par  $a^n(n-1)!$  ( $n \geq n_0$ ).

#### **6. S'il s'agit d'une suite définie à l'aide d'une somme et faisant intervenir des fonctions trigonométriques**


Pour déterminer le terme général d'une suite définie à l'aide d'une somme et faisant intervenir des fonctions trigonométriques, il peut être utile d'utiliser les propriétés des nombres complexes, en reconnaissant la partie réelle ou la partie imaginaire d'une exponentielle complexe (voir la fiche méthodologique du chapitre "**Nombres complexes**").

#### **7. En effectuant un raisonnement par récurrence**

Pour déterminer une expression du terme général d'une suite que l'on ne parvient pas à exprimer à l'aide de suites classiques, on peut :

- si le résultat est donné dans l'énoncé, le démontrer par récurrence (récurrence simple si la suite  $u$  est définie par une relation de récurrence simple, récurrence double si la suite  $u$  est définie par une relation de récurrence double ; récurrence forte si les termes de la suite sont définies par récurrence en fonction de tous les termes précédents, voir chapitre "**Préliminaires**" pour les différents types de raisonnements par récurrence),
- si le résultat n'est pas donné dans l'énoncé, conjecturer une forme générale à l'aide du calcul des premiers termes de la

suite, puis démontrer le résultat à l'aide d'une récurrence en bonne et due forme.

 Voir l'exercice "Les incontounables".

### **8. En utilisation une caractérisation d'une suite**

Pour déterminer une expression du terme général d'une suite  $u$  que l'on ne parvient pas à exprimer à l'aide des méthodes précédentes, on peut utiliser une caractérisation de cette suite, si une telle caractérisation a été démontrée. Ainsi, s'il existe une seule suite  $v$  vérifiant un certain nombre de propriétés, alors pour montrer que  $u$  est égale à  $v$ , il suffit de montrer que  $u$  vérifie toutes les propriétés caractéristiques de  $v$ .

### **9. En se ramenant à une suite annexe déjà étudiée précédemment**

Pour déterminer une expression du terme général d'une suite  $u$  que l'on ne parvient pas à exprimer à l'aide des méthodes précédentes, on peut le plus souvent se ramener à une autre suite précédemment étudiée dans l'énoncé ; ou à l'inverse introduire à partir de  $u$  une suite  $v$  vérifiant des relations plus simples, à l'image des suites introduites dans les points I.2, I.3, I.4 et I.5 ci-dessus.

## **II. Montrer qu'une suite est majorée, minorée, bornée, périodique, stationnaire, déterminer sa borne supérieure, inférieure**

**Attention** : les notions de suite (numérique) "majorée" et de suite (numérique) "minorée" ne s'appliquent qu'aux suites réelles ( $\mathbb{C}$  n'étant pas un ensemble totalement ordonné, voir chapitre "Préliminaires").

### **1. Montrer qu'une suite réelle est (ou n'est pas) majorée, minorée et déterminer le cas échéant sa borne supérieure, inférieure**

**Attention** tout d'abord à ne pas confondre "majorant", "borne supérieure" et "maximum". Tout d'abord, il n'y a pas unicité du majorant : on parle donc "d'un" majorant et non "du" majorant. Une suite admet une borne supérieure si elle admet un majorant ; la borne supérieure est alors unique et c'est le plus petit majorant de la suite. Cette borne supérieure peut être atteinte (auquel cas la borne supérieure est également appelée "maximum" de la suite), mais elle peut aussi ne pas être atteinte : dans ce dernier cas, la suite admet une borne supérieure mais pas de maximum. Le soin est laissé au lecteur de remplacer dans ces explications les mots "majorant", "borne supérieure" et "maximum" par les mots "minorant", "borne inférieure" et "minimum". Précisons enfin que toutes ces notions et explications peuvent s'étendre aux fonctions numériques définies sur un intervalle non réduit à un point.


Pour montrer qu'une suite réelle  $u$  est majorée (resp. minorée), le cas échéant à partir d'un certain rang, on peut :

- se ramener à la définition, en exhibant un majorant et en veillant à ce que le majorant considéré soit indépendant de  $n$ ,
- montrer que  $u$  est convergente et croissante (resp. décroissante) à partir d'un certain rang ( $u$  étant alors majorée (resp. minorée), à partir de ce rang, par sa limite).

Pour déterminer la borne supérieure (resp. inférieure) d'une suite réelle  $u$ , on peut :

- se ramener à la définition, en exhibant un majorant (resp. minorant) et en veillant à ce que le majorant (resp. minorant) considéré soit indépendant de  $n$ , puis en montrant que ce majorant (resp. minorant) est le plus petit (resp. le plus grand) possible en raisonnant par l'absurde,
- si  $u$  est définie comme combinaison simple de plusieurs suites, utiliser les propriétés de l'opérateur sup (resp. inf) en les redémontrant car elles ne font pas partie du cours (voir chapitre "Préliminaires").


Pour montrer qu'une suite  $u$  n'est pas majorée (resp. minorée), on peut raisonner par l'absurde : en la supposant majorée (resp. minorée), considérer sa borne supérieure (resp. inférieure) et exhiber un terme de cette suite supérieure (resp. inférieur) à cette borne.

 Voir l'exercice "Étude générale de suite".

### **2. Montrer qu'une suite est bornée**

Pour montrer qu'une suite  $u$  est bornée, le cas échéant à partir d'un certain rang, on peut :

- montrer que  $u$  est convergente (toute suite convergente étant bornée),
- s'il s'agit d'une suite **réelle**, montrer que  $u$  est minorée et majorée à partir d'un certain rang,
- s'il s'agit d'une suite **réelle**, montrer que la suite  $|u|$  est majorée (la notation  $| \cdot |$  désignant ici la valeur absolue) : voir point II.1 ci-dessus,
- s'il s'agit d'une suite **complexe non réelle**, montrer que la suite réelle  $|u|$  est majorée (la notation  $| \cdot |$  désignant ici le module), par exemple en montrant que les deux suites réelles  $\Re(u)$  et  $\Im(u)$  sont majorées (voir point II.1 ci-dessus).

 Voir l'exercice "Suites récurrentes linéaires d'ordre  $p$ ".

### 3. Montrer qu'une suite est périodique

Pour montrer qu'une suite  $u$  est périodique, le cas échéant à partir d'un certain rang  $n_0$ , on peut :

- se ramener à la définition en exhibant un entier naturel  $p$  non nul tel que :  $\forall n \geq n_0, u_{n+p} = u_n$  (en prenant soin de ne parler de "la" période de la suite que si la période obtenue est la plus petite des périodes possibles),
- s'il s'agit d'une somme de plusieurs suites périodiques, considérer la somme des périodes de ces suites (qui est alors une période de  $u$ , à savoir démontrer),
- s'il s'agit d'un produit de plusieurs suites périodiques, considérer le produit des périodes de ces suites (qui est alors une période de  $u$ ).

En outre, il peut arriver que pour comparer des périodes d'une même suite (afin de déterminer "la" période d'une suite), il s'avère utile de faire apparaître certaines divisions euclidiennes d'entiers.

### 4. Montrer qu'une suite est (ou n'est pas) stationnaire

Pour montrer qu'une suite  $u$  est (ou n'est pas) stationnaire, on peut :

- se ramener à la définition en montrant que  $u$  est constante à partir d'un certain rang,
- procéder par l'absurde, éventuellement en invoquant le fait que toute suite stationnaire converge, la réciproque étant fautive.

## III. Calculer une somme, un produit de termes d'une suite

Dans cette section, on considère uniquement des sommes partielles ou des produits partiels. Pour calculer une somme ou un produit d'une infinité de termes d'une suite, voir le chapitre "Séries" (**hors-programme en première année**).


### 1. Calculer une somme de termes d'une suite

Pour déterminer une somme (partielle) de termes d'une suite, on peut :

- déterminer une expression du terme général de cette suite (voir point I ci-dessus), puis sommer l'expression obtenue,
- se ramener aux résultats du cours sur les sommes des termes d'une suite arithmétique ou géométrique (en distinguant, dans ce dernier cas, suivant que la raison est égale à 1 ou non \_ce qui, dans le cadre d'une suite complexe non réelle, implique généralement de considérer le lieu de son argument modulo  $2\pi$ ) voir fiche méthodologique "Nombres Complexes",

– si la suite s'écrit sous forme de quotient, envisager une décomposition en éléments simples (voir le chapitre "Fractions rationnelles"), puis faire apparaître une somme de termes dont la plupart s'éliminent deux à deux,


- s'il s'agit d'une suite complexe non réelle, se ramener aux méthodes décrites dans la fiche méthodologique "Nombres complexes".

 Voir les exercices "Suites usuelles", "Suites définies à l'aide d'une somme", "Suite et partie entière".

### 2. Calculer un produit, ou une puissance, de termes d'une suite

Pour déterminer un produit (partiel) ou une puissance de termes d'une suite, on peut :

- déterminer une expression du terme général de cette suite (voir point I ci-dessus), puis effectuer le produit de l'expression obtenue ou passer l'expression obtenue à l'exposant considéré,
- si chacun des termes du produit ou sous l'exposant est positif, lui appliquer la fonction  $\ln$  (le logarithme népérien d'un produit de réels strictement positifs étant égal à la somme des logarithmes de ces réels), ce qui permet de transformer le produit, ou la puissance, en somme, puis se ramener au point III.1 ci-dessus.

 Voir l'exercice "Les incontournables".

## IV. Déterminer la monotonie éventuelle d'une suite réelle $u$

**Attention** : de même que pour les notions de "majorant" ou de "minorant", les notions de suite (numérique) "croissante" ou "décroissante" ne s'appliquent qu'aux suites réelles ( $\mathbb{C}$  n'étant pas un ensemble totalement ordonné, voir chapitre "Préliminaires").

### 1. En comparant deux termes successifs de la suite

Pour montrer qu'une suite réelle  $u$  est croissante (resp. décroissante) à partir d'un certain rang  $n_0$ , on peut :


- majorer (resp. minorer) directement, pour tout entier  $n \geq n_0$ ,  $u_{n+1}$  en essayant de faire apparaître  $u_n$ ,
- montrer que :  $\forall n \geq n_0, u_{n+1} - u_n \geq 0$  (resp. que :  $\forall n \geq n_0, u_{n+1} - u_n \leq 0$ ), méthode particulièrement intéressante si  $u$  s'écrit sous forme de somme, et ne nécessitant par ailleurs aucune hypothèse sur  $u$ ,
- si  $u$  est à termes positifs à partir du rang  $n_0$ , montrer que :  $\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$  (resp. que :  $\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ ) méthode

particulièrement intéressante pour les suites faisant intervenir des produits, des quotients, des puissances et des factorielles, ce qui permet en général de nombreuses simplifications),

- si  $u$  est à termes négatifs à partir du rang  $n_0$ , appliquer la méthode précédente en inversant les inégalités (**attention** en effet à ne pas négliger ce cas : lorsque  $u_n$  est négatif,  $\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$  entraîne :  $\forall n \geq n_0, u_{n+1} \leq u_n$  (et non l'inverse), et  $u$  est alors décroissante),

- utiliser un raisonnement par équivalence (méthode particulièrement intéressante lorsque ni la différence, ni le produit, ne permettent de faire apparaître des termes faciles à simplifier),

- si  $u$  vérifie une relation de la forme  $u_{n+1} = f(u_n)$ , voir le paragraphe spécial sur l'étude complète de ces suites,
- utiliser une récurrence sur la croissance des termes en montrant par exemple que, pour tout entier  $n$  fixé, si  $u_{n+1} \geq u_n$  alors  $u_{n+1} \geq u_{n+2}$  (rare).

 Voir les exercices "Les incontournables", "Suites définies à l'aide d'une somme", "Suite et partie entière", "Étude générale de suite".

### 2. S'il s'agit d'une suite vérifiant une relation de la forme $u_n = f(n)$

Pour déterminer la monotonie d'une suite  $u$  vérifiant une relation du type :  $\forall n \geq n_0, u_n = f(n)$ , on peut étudier la fonction  $f$  et déterminer ses variations : si  $f$  est croissante sur  $]x_1, +\infty[$  ( $x_1 \in \mathbb{R}^+$ ),  $u$  est alors croissante à partir du rang  $n_1 = \lfloor x_1 \rfloor + 1$  (la réciproque étant fautive).

### 3. Si $u$ s'écrit comme une combinaison simple de suites dont la monotonie est identique et connue

Pour déterminer la monotonie d'une suite  $u$  s'écrivant comme une combinaison simple de suites dont la monotonie est connue, on peut :

- s'il s'agit d'une somme de suites de même monotonie, conclure directement,  $u$  ayant alors une monotonie identique à celles de ces suites,
- s'il s'agit d'un produit de suites **positives** et de même monotonie, conclure directement,  $u$  ayant alors une monotonie identique à celles de ces suites.

Dans le cas d'un produit de suites dont les termes ne sont pas de signe constant, on ne peut pas conclure directement, et il faut alors se reporter aux autres méthodes.

#### 4. En utilisant des résultats sur les suites classiques

Pour déterminer la monotonie d'une suite  $u$ , on peut :

- si le terme général de la suite est une somme partielle de termes positifs (resp. négatifs) à partir d'un certain rang  $n_0$ , conclure directement que  $u$  est (resp. décroissante) à partir du rang  $n_0$ ,
- si la suite est arithmétique, sa monotonie est donnée par le signe de sa raison,
- si la suite est géométrique de raison  $q \in \mathbb{R}^*$ , sa monotonie est donnée par sa raison ( $u$  est strictement croissante si  $q > 1$ , constante si  $q = 1$ , décroissante si  $q \in ]0, 1[$  et non monotone si  $q \in \mathbb{R}^*$ ).

#### 5. En utilisant des suites extraites de $u$

Pour montrer qu'une suite  $u$  n'est pas monotone, on peut :

- exhiber deux suites extraites (ou sous-suites) de  $u$  et montrer qu'elles sont de monotonie contraire,
- raisonner par l'absurde : en supposant  $u$  monotone à partir d'un certain rang, aboutir à une contradiction.

### V. Déterminer la nature (convergence, divergence) d'une suite, déterminer sa limite si elle existe

Précisons tout d'abord ce qu'il ne faut pas faire : parler de la limite d'une suite réelle  $u$  ni écrire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  tant qu'on n'a pas montré que  $u$  admet une limite. De plus, pour "passer à la limite" dans une égalité ou dans une inégalité, il faut justifier au préalable que les suites en présence convergent (le cas échéant à l'aide du théorème de l'encadrement), et on rappelle qu'après passage à la limite, toutes les éventuelles inégalités strictes deviennent larges.

**Notation** : il y a deux façons de noter une limite :


- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$ ,
- $\lim_{+\infty} u = 3$ .

Enfin, on rappelle qu'on ne peut s'intéresser à la limite d'une suite réelle ou complexe qu'en  $+\infty$ , et non en un point.

#### 1. En utilisant le théorème de la limite monotone

Pour montrer qu'une suite réelle  $u$  converge, on peut utiliser le théorème de la limite monotone en montrant que la suite  $u$  est croissante (resp. décroissante) à partir d'un certain rang  $n_0$  et majorée (resp. minorée).


La limite de cette suite est alors le réel  $\sup_{n \geq n_0} u_n$  (resp.  $\inf_{n \geq n_0} u_n$ ).

 Voir les exercices "Suites usuelles", "Les incoutournables", "Règle de D'Alembert", "Etude générale de suite".

#### 2. En utilisant le théorème de l'encadrement

Si  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont trois suites réelles et si  $u$  et  $w$  convergent vers la même limite  $\ell$  ( $\ell \in \mathbb{R}$ ), et s'il existe un rang  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n \leq w_n$ , alors  $v$  converge vers  $\ell$ .

En particulier, lorsque des parties entières apparaissent, il est généralement nécessaire d'utiliser la définition de la fonction partie entière (voir le chapitre "Fonctions usuelles").

 Voir les exercices "Suites dont l'expression en fonction de  $n$  est connue", "Etude générale de suite", "Convergence de suites définies par la relation  $u_{n+1} = f(u_n)$ ".

#### 3. En effectuant un calcul direct

Dans les cas suivants, il est possible de déterminer directement la limite de la suite  $u$  :

- si  $u$  est l'image par une fonction  $f$  d'une suite simple, on sait que si la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell \in \mathbb{R}$  et si  $f$  est définie et continue en  $\ell$ , alors la suite  $(f(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(\ell)$ . Plus généralement, si  $f$  n'est pas définie en  $\ell$  mais tend vers une limite  $\alpha$  en  $\ell$ , alors  $(f(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $\alpha$ . Enfin, noter que dans certains cas (par exemple avec la fonction partie entière et si  $\ell \in \mathbb{Z}$ ), il peut être utile de détailler comment la suite  $v$  converge vers  $\ell$  (par valeurs inférieures ou par valeurs supérieures) avant de procéder à la composition de limites,

■ si  $u$  est de la forme  $(v_n^{w_n})_{n \in \mathbb{N}}$  (où  $v$  est une suite à valeurs strictement positives), on peut rechercher la limite de la suite  $(w_n \ln(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$  puis utiliser le point précédent en composant par la fonction exponentielle,

■ si  $u$  est s'écrit sous forme de somme et/ou de produit de suites dont on connaît les natures respectives :

□ **Limite de la somme de deux suites réelles dont on connaît les limites respectives :**

	$-\infty$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Indéterminé
$\ell' \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$\ell + \ell'$	$+\infty$
$+\infty$	Indéterminé	$+\infty$	$+\infty$

□ **Limite du produit de deux suites réelles dont on connaît les limites respectives :**

	$-\infty$	$\ell < 0$	0	$\ell > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Indéterminé	$-\infty$	$-\infty$
$\ell' < 0$	$+\infty$	$\ell \ell'$	0	$\ell \ell'$	$-\infty$
0	Indéterminé	0	0	0	Indéterminé
$\ell' > 0$	$-\infty$	$\ell \ell'$	0	$\ell \ell'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Indéterminé	$+\infty$	$+\infty$


Dans les deux cas, pour lever des formes indéterminés, il est souvent utile d'utiliser des négligeabilités ou des équivalents (voir point VI ci-dessous).

 Voir l'exercice "Suites usuelles".

#### 4. S'il s'agit d'une suite de sommes partielles

Pour déterminer la nature, et la limite éventuelle, d'une suite  $u$  de sommes partielles associée à une autre suite (i.e. une suite  $u$  vérifiant une relation de la forme :  $\forall n \geq n_0, u_n = \sum_{k=n_0}^n v_k$ ), on peut se reporter aux méthodes relatives aux séries : voir le chapitre "Séries" (hors-programme en première année).

Garder simplement à l'esprit que ce n'est pas parce que l'on somme des termes de plus en plus petits et tendant vers 0 que la suite des sommes partielles converge (attention aux intuitions trompeuses !) : ainsi, par exemple, la suite  $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  diverge vers  $+\infty$ , alors que la suite  $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\frac{\pi^2}{6}$ .

 Voir l'exercice "Autour de la série harmonique", ainsi que le chapitre "Séries".

**Attention :** si les termes  $v_k$  ( $k \geq n_0$ ) que l'on somme dépendent de  $n$ , le cours sur les séries ne s'applique pas. Il faut généralement revenir à la définition (voir point point V.10 ci-dessous).


#### 5. En considérant une somme de Riemann

Pour montrer qu'une suite définie sous la forme d'une somme converge, on peut essayer de reconnaître une somme de Riemann. Ainsi, on pourra conclure que la suite converge vers une intégrale (sous réserve que la fonction considérée soit bien continue sur le segment en question). Pour cela, on peut :

■ dans la majorité des cas : faire apparaître une somme de Riemann dont les bornes valent respectivement 0 et 1. Il s'agit donc d'exprimer le terme général de la suite en fonction d'une des quantités  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$  ou  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ , qui tendent vers  $\int_0^1 f(t) dt$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ,


■ plus rarement : faire apparaître une somme de la forme  $\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k \frac{b-a}{n}\right)$  ou  $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a+k \frac{b-a}{n}\right)$ , qui tendent vers

$\int_a^b f(t) dt$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

 Voir l'exercice "Suites définies à l'aide d'une somme".

### 6. En montrant que la suite est adjacente à une autre suite

Pour montrer qu'une suite réelle  $u$  converge, on peut exhiber une suite  $v$  et montrer que les suites  $u$  et  $v$  sont adjacentes, en montrant que  $u$  et  $v$  sont monotones de sens de variations contraires, et que la suite  $u - v$  converge vers 0. En effet, deux suites adjacentes convergent vers la même limite.


 Voir l'exercice "Autour de la série harmonique".

### 7. En comparant la suite à une suite dont on connaît la nature

Pour déterminer la nature d'une suite réelle  $u$ , on peut utiliser les comparaisons avec d'autres suites (négligeabilités, suite dominée par une autre, équivalents, développements limités) : voir point VI ci-dessous. En particulier, on rappelle que deux suites équivalentes ont même limite si celle-ci existe.

### 8. En considérant la suite $(u_n - \ell)$

Pour montrer qu'une suite  $u$  converge vers  $\ell \in \mathbb{C}^*$ , on peut montrer que la suite  $(u_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

 Voir l'exercice "Théorème de Cesàro".

### 9. En utilisant les suites extraites

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  (avec  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ), alors, pour tout  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{qn+p} = \ell$ . En particulier :

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+2} = \ell \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \ell \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \ell \end{cases}$$

Plus généralement, si  $\varphi$  est une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  strictement croissante (parfois appelée "extraction"), alors on a la relation : si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$ .

Réciproquement, si les suites extraites  $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$  (resp.  $(u_{3p})_{p \in \mathbb{N}}$ ,  $(u_{3p+1})_{p \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{3p+2})_{p \in \mathbb{N}}$ , etc.) convergent vers la même limite, alors  $u$  converge également vers cette limite.


Par contraposée, si au moins une suite extraite de  $u$  ne converge pas, on peut immédiatement conclure que  $u$  ne converge pas. Plus généralement, si deux suites extraites tendent vers des limites différentes, on peut également conclure immédiatement que  $u$  n'admet pas de limite.

### 10. En utilisant la définition

Pour montrer qu'une suite  $u$  converge, on peut revenir à la définition (la. Cette méthode est le plus souvent utilisée dans les exercices théoriques (notamment lorsque les suites ne sont pas définies explicitement). En règle générale, on dispose d'hypothèses concernant la convergence de certaines suites réelles  $u, v, \dots$  et il faut montrer qu'une autre suite réelle  $t$  converge. Pour montrer qu'une suite réelle  $t$  converge vers  $\ell_1 \in \mathbb{R}$  en utilisant la définition, on procède en général **successivement** en cinq étapes :

- (étape 1) considérer un réel  $\varepsilon > 0$  quelconque et fixé pour toute la suite du raisonnement,
- (étape 2) considérer pour chaque suite  $u, v, \dots$  qui converge vers  $\ell_0 \in \mathbb{C}$  ( $\ell_1 \in \mathbb{C}, \dots$ ), un rang  $n_0$  ( $n_1, \dots$ ) (dont on connaît l'existence) tel que :  $\forall n \geq n_0, |u_n - \ell_0| \leq \varepsilon$  ( $\forall n \geq n_1, |v_n - \ell_1| \leq \varepsilon, \dots$ ),
- (étape 3) considérer l'entier  $N = \max \{n_0, n_1, \dots\}$  (veiller à ce que  $N$  soit bien défini), ce qui permet que pour tout entier  $n \geq N$ , toutes les inégalités sur  $u, v, \dots$  soient vérifiées,
- (étape 4) manipuler les différentes inégalités obtenues et trouver un rang  $N' \geq N$  tels que  $\forall n \geq N', |t_n - \ell_1| \leq \varepsilon$ ,
- (étape 5) conclure.

Dans le cadre de cette méthode, il peut arriver que le membre de droite de la dernière inégalité obtenue soit un multiple de  $\varepsilon$  (par exemple  $3\varepsilon$ ). Dans cet exemple, il suffit, soit d'invoquer la surjectivité de la fonction  $\varepsilon \mapsto 3\varepsilon$ , soit plus simplement de considérer toutes les inégalités de départ pour  $\frac{\varepsilon}{3}$ .

 Voir l'exercice "Théorème de Cesàro".


### **11. En montrant que la suite est une suite de Cauchy**

Pour montrer qu'une suite converge, on peut montrer qu'il s'agit d'une suite de Cauchy (on rappelle que pour les suites réelles ou complexes, il y a équivalence entre suite convergente et suite de Cauchy). Cette méthode est le plus souvent utilisée dans les exercices théoriques, et à la différence de la définition, elle permet de montrer qu'une suite converge sans pour autant connaître préalablement sa limite.

Pour montrer qu'une suite est de Cauchy, on peut :

- montrer que :  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0, |u_m - u_n| < \varepsilon$  (ou  $|u_m - u_n| \leq \varepsilon$ ),
- montrer que :  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}, |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$  (ou  $|u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon$ ).

Noter que la seconde inégalité est souvent plus facile à établir que la première. Pour l'établir, on peut essayer de majorer, pour tout entier  $n$ , la quantité  $|u_{n+p} - u_n|$  par le terme général d'une suite **indépendante de  $p$** , de limite nulle lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . La définition de la limite appliquée à cette suite permet alors de conclure.

 Voir l'exercice "Suites de Cauchy".

## **VI. Montrer qu'une suite est négligeable, équivalente, dominée par une autre suite**

### **1. Montrer qu'une suite est négligeable devant une autre suite**

Pour montrer qu'une suite  $u$  est négligeable devant une autre suite  $v$ , on peut :

- si les termes de la suite  $v$  sont tous non nuls à partir d'un certain rang, montrer que la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  converge vers 0, le plus souvent à l'aide du théorème de l'encadrement (voir point V.2 ci-dessus),
- revenir à la définition, en montrant qu'il existe une suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente de limite nulle et un rang  $n_0$  tels que :  $\forall n \geq n_0, u_n = \varepsilon_n v_n$ ,
- utiliser les croissances comparées usuelles.

### **2. Montrer qu'une suite est dominée par une autre suite**

Pour montrer qu'une suite  $u$  est dominée par une autre suite  $v$ , on peut :

- si les termes de la suite  $v$  sont tous non nuls à partir d'un certain rang, montrer que la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  est bornée,
- revenir à la définition, en montrant qu'il existe une suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bornée et un rang  $n_0$  tels que :  $\forall n \geq n_0, u_n = \alpha_n v_n$ .


### **3. Montrer que deux suites sont équivalentes (lorsque l'énoncé donne l'équivalent)**

Pour montrer que deux suites  $u$  et  $v$  (connues) sont équivalentes, on peut :

- si les termes de la suite  $v$  ont tous non nuls à partir d'un certain rang, montrer que la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  converge vers 1, le plus souvent à l'aide du théorème de l'encadrement (voir point V.2 ci-dessus),
- revenir à la définition, en montrant que la suite  $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est négligeable devant l'une des suites  $u$  ou  $v$  (voir point VII.2 ci-dessus),




- montrer qu'il existe une suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de limite 1 et un rang  $n_0$  tel que :  $\forall n \geq n_0, u_n = h_n v_n$

 Voir les exercices "Recherche d'équivalents", "Suites et partie entière".

#### **4. Déterminer un équivalent d'une suite (lorsque l'énoncé ne donne pas l'équivalent)**

Pour déterminer un équivalent (inconnu) d'une suite  $u$ , on peut :

- conjecturer un équivalent et le montrer à l'aide du point précédent,
- si  $u$  converge vers  $\ell \in \mathbb{C}^*$ , conclure directement que :  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell$  (ceci n'étant pas valable si  $u$  converge vers 0),
- utiliser les croissances comparées usuelles,
- si  $u$  s'exprime comme somme finie et si les termes de la somme sont négligeables par rapport à l'un des termes de la somme  $u$  est alors équivalente au terme dominant de la somme,
- si  $u$  s'exprime sous forme de somme finie et que les termes de la somme ne sont pas négligeables les uns par rapport aux autres, utiliser les développements limités ou asymptotiques (voir le chapitre "**Formules de Taylor. Développements limités**"),
- si  $u$  s'exprime sous forme de somme infinie de termes, utiliser les méthodes du cours sur les séries (voir le chapitre "**Séries**", hors-programme en première année),
- utiliser les compositions d'équivalents licites avec certaines fonctions et sous certaines hypothèses (**à la limite du programme**, démonstrations à connaître),
- encadrer la suite par deux suites équivalentes entre elles, la suite étant alors équivalente à chacune d'elles (démonstration à connaître, à l'aide du théorème de l'encadrement).

 Voir les exercices "Étude générale de suites", "Autour de la série harmonique".

## **VII. Plan d'étude d'une suite réelle vérifiant une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$**

Précisons tout d'abord ce qu'il ne faut pas faire : appliquer les résultats de ce paragraphe aux suites vérifiant une relation de la forme  $u_{n+1} = f_n(u_n)$ , où  $f_n$  est une fonction qui dépend de  $n$ . Les méthodes décrites dans ce paragraphe ne sont valables que lorsque la fonction  $f$  est indépendante de  $n$ .

Précisons également que pour l'étude de ce type de suite, un graphique peut s'avérer utile, voire dans certains cas indispensable. En traçant le graphe de  $f$ , on peut observer graphiquement le comportement de la suite  $u$  en fonction de son premier terme. Pour cela, il suffit d'inscrire  $u_0$  sur l'axe des abscisses, de reporter la valeur de  $u_1$  sur l'axe des ordonnées grâce à  $f$ , reporter la valeur de  $u_1$  sur l'axe des abscisses par symétrie par rapport à la première bissectrice du plan (i.e. la droite d'équation  $y = x$ ), et ainsi de suite. Cela permet de formuler des conjectures sur les différents comportements de la suite  $u$  en fonction de son premier terme, et d'identifier visuellement les différentes parties stables de  $f$ .

Dans tout ce paragraphe,  $f$  désigne une fonction numérique à valeurs réelles. Noter que certains résultats de ce paragraphe nécessitent que  $f$  possèdent des propriétés remarquables (continuité, variations...). Pour des précisions sur les méthodes utilisées dans ce cadre, voir le chapitre "**Fonctions**".

### **A. Étude de monotonie**

#### **1. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$**

#### **2. Rechercher une ou plusieurs partie(s) stable(s) par $f$ sur laquelle $f$ est monotone**

Remarquons tout d'abord qu'une suite réelle  $u$  définie par une relation de la forme :  $\forall n \geq n_0, u_{n+1} = f(u_n)$  n'est définie que si :  $\forall n \geq n_0, u_n \in \mathcal{D}_f$ , où  $\mathcal{D}_f$  est le domaine de définition de  $f$ . Ainsi, pour que  $u$  soit correctement définie, il est nécessaire que son premier terme soit à valeurs dans une partie stable par  $f$  et incluse dans  $\mathcal{D}_f$ .

Une fois cette condition vérifiée, il est souvent utile (voir point V.3 ci-dessous) de rechercher une partie de  $\mathcal{D}_f$  stable par  $f$ , contenant le premier terme de  $u$ , sur laquelle  $f$  est monotone (en élargissant naturellement à toute partie la notion de fonction monotone sur un intervalle). Pour cela, on peut :


- tracer le graphe de  $f$ , pour identifier une partie stable par  $f$ , et ensuite montrer que la partie trouvée en est bien une,
- procéder par analyse synthèse : supposer qu'une telle partie de  $A \subset \mathcal{D}_f$  existe ; en considérant le fait que :  $\forall x \in A, f(x) \in A$ , établir des conditions nécessaires sur  $A$  pour que cette partie soit stable (analyse) ; puis vérifier que ces conditions sont également suffisantes : on obtient ainsi une condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie soit stable par  $f$ , on pourra alors considérer une partie qui vérifie ces conditions.

### 3. Déterminer la monotonie de $u$

Pour déterminer la monotonie de  $u$  (une fois les variations de  $f$  connues et une partie  $A$  stable par  $f$  obtenue), on peut :

- si  $f$  est croissante sur  $A$ , considérer la position relative des deux premiers termes : si  $u_0 \leq u_1$ , alors  $u$  est croissante ; dans le cas contraire elle est décroissante (résultat à la limite du programme en première année, démonstration par récurrence simple à connaître, mais que l'on pourra en revanche utiliser sans démonstration aux concours de spé),
- si  $f$  est décroissante sur  $A$ ,  $u$  n'est alors pas monotone (sauf cas très rare d'une suite constante ou stationnaire, auquel cas il est inutile d'employer cette méthode). Les deux suites  $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$  sont alors monotones de sens de variation contraires (en effet, si  $f$  est décroissante, alors  $f \circ f$  est croissante et le point précédent permet de conclure, en considérant cette fois-ci, pour la suite  $(u_{2p})$ , la position relative de ses deux premiers termes, à savoir  $u_0$  et  $u_2$  la suite  $(u_{2p+1})$  ayant alors un sens de variation contraire.

En résumé :	$u$ est :	$(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ est :	$(u_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ est :
Si $f$ est croissante et si $u_1 \geq u_0$	croissante	croissante	croissante
Si $f$ est croissante et si $u_1 \leq u_0$	décroissante	décroissante	décroissante
Si $f$ est décroissante et si $u_2 \geq u_0$	non monotone	croissante	décroissante
Si $f$ est décroissante et si $u_2 \leq u_0$	non monotone	décroissante	croissante

 Voir l'exercice "Suites usuelles".

## B. Etude de nature (convergence, divergence), calcul de limite

Pour déterminer la nature d'une suite vérifiant une relation de la forme  $u_{n+1} = f(u_n)$ , deux grandes catégories de méthodes sont envisageables :

- soit étudier préalablement la monotonie de  $u$  (voir point A ci-dessus),
- soit utiliser des méthodes ne faisant pas intervenir directement la monotonie de  $u$ .

### 1. En utilisant l'étude de monotonie de $u$ établie au point A ci-dessus

Une fois connue la monotonie de la suite  $u$  à l'aide des méthodes du point ci-dessus, on peut généralement conclure assez rapidement :

- si  $u$  est croissante (resp. décroissante), il suffit de montrer que  $u$  est majorée (resp. minorée) et d'utiliser le théorème de la limite monotone,
- si  $u$  n'est pas monotone (cas où les deux suites extraites d'indices pairs et impairs sont de monotonie contraire), montrer que  $u$  converge revient à montrer que ces deux suites sont adjacentes. Attention, ce n'est pas toujours le cas, il faut donc procéder lentement afin d'éviter les erreurs.

### 2. Utiliser les limites éventuelles de $u$

Pour déterminer la limite de  $u$ , on peut préalablement rechercher quelles sont les seules limites "possibles" de  $u$ . Outre  $+\infty$  et  $-\infty$  (cas que l'on peut parfois éliminer compte tenu de considérations sur le signe ou le caractère borné de  $u$ ), les limites éventuelles de  $u$  appartenant à  $\mathcal{D}_f$  vérifient l'équation  $f(x) = x$  (sous réserve que  $f$  soit continue).

Il est donc particulièrement utile de résoudre l'équation  $f(x) = x$  pour déterminer les limites finies éventuelles de  $u$ . On peut alors, soit raisonner par l'absurde et montrer ainsi que  $u$  diverge, soit procéder par élimination pour déterminer la limite de  $u$  une fois établie la convergence de  $u$ . Noter que l'équation  $f(x) = x$  apporte des conditions nécessaires sur les limites possibles de  $u$  et ne montre en aucun cas que  $u$  converge vers une de ces limites. Lorsque l'ensemble solution est un singleton  $\{\ell\}$  où  $\ell \in \mathbb{R}$ , on peut tenter de montrer que la suite converge vers  $\ell$  (voir point VI ci-dessus).

### 3. Montrer que $f$ est contractante (voir le chapitre "Fonctions")

Lorsque l'ensemble des solutions de l'équation  $f(x) = x$  est un singleton  $\{\ell\}$ , où  $\ell \in \mathbb{R}$ , on peut parfois montrer directement que  $f$  converge vers  $\ell$  sans rechercher la monotonie de  $u$ . Pour cela, on peut notamment, **successivement** :

- montrer que  $f$  est contractante, i.e. lipschitzienne de rapport  $k \in ]0, 1[$ , en particulier à l'aide de l'inégalité des accroissements finis lorsque  $f$  vérifie les hypothèses de cette inégalité et lorsque  $|f'|$  est majorée par un réel  $k \in ]0, 1[$ ,
- appliquer, le cas échéant à partir d'un certain rang  $n_0$ , la définition d'une fonction lipschitzienne aux points  $u_n$  et  $\ell$  (on obtient alors :  $\forall n \geq n_0, |u_{n+1} - \ell| \leq k |u_n - \ell|$ ),
- itérer la relation obtenue (on obtient alors :  $\forall n \geq n_0 + 1, |u_n - \ell| \leq k^n |u_{n_0} - \ell|$ ),
- conclure à l'aide du théorème de l'encadrement,  $k$  étant compris entre 0 et 1 au sens strict, ce qui permet de conclure que  $u$  converge vers  $\ell$ .

☞ Voir l'exercice "Convergence de suites définies par la relation  $u_{n+1} = f(u_n)$ " et le chapitre "Fonctions à valeurs réelles ou complexes".

#### 4. Cas inverse ou $u$ est de la forme $u_n = f(u_{n+1})$

Précisons tout d'abord qu'une telle suite n'est pas nécessairement définie. En effet puisque à partir d'un terme  $u_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), le terme  $u_{n+1}$  est défini par l'image réciproque par  $f$  de l'élément  $u_n$  (i.e.  $u_{n+1} \in f^{-1}(\{u_n\})$ ). Il faut donc préalablement montrer que l'ensemble  $f^{-1}(\{u_n\})$  contient un élément (surjectivité de  $f$  sur  $A$ ) et un seul (injectivité de  $f$  sur  $A$ ).

L'objectif est alors de montrer que sur une partie stable contenant  $u_0$ ,  $f$  est bijective et de se ramener au cas précédent en utilisant la relation :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$ .

Rappel : la notation  $f^{-1}(u_n)$  nécessite que  $f$  soit bijective, mais la notation  $f^{-1}(\{u_n\})$ , qui désigne l'image réciproque de la partie  $\{u_n\}$ , n'est qu'une notation ne nécessitant pas la bijectivité de  $f$  (voir la fiche de cours "Préliminaires").

## VIII. Suites réelles définies comme solution d'une suite d'équations $f_n(x_n) = 0$

Bien que cette étude soit le plus souvent détaillée, il est bon d'en connaître les étapes importantes et de connaître les méthodes permettant de les effectuer avec succès.

### 1. Etude des variations des fonctions $f_n$

Cette étude a pour objectif de vérifier que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie. Il s'agit de montrer que chacune des équations  $f_n(x_n) = 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) admet une et une seule solution, autrement dit que les fonctions  $f_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) établissent une bijection d'un certain intervalle vers un autre intervalle contenant 0, ce qui, le plus souvent, est fait à l'aide du théorème dit "de la bijection" (toute fonction strictement monotone et continue sur un intervalle  $I$  réalise une bijection de cet intervalle vers  $f(I)$  qui est alors un intervalle).

### 2. Etude de la monotonie de la suite à l'aide des variations de $f_n$

Pour montrer que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone (par exemple, croissante), il suffit de comparer, pour tout entier naturel  $n$ ,  $x_{n+1}$  à  $x_n$  (dans l'exemple, montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} \geq x_n$ ). Lorsque la monotonie des fonctions  $f_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) est connue (prenons l'exemple de fonctions croissantes), il suffit alors de :

■ **option A** : montrer, en considérant la croissance des fonctions  $f_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), que :  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x_{n+1}) \geq f_n(x_n)$ , ce qui revient à montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x_{n+1}) \geq 0$ ,

■ **option B** : montrer, en considérant la croissance des fonctions  $f_{n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), que :  $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1}(x_{n+1}) \geq f_{n+1}(x_n)$ , ce qui revient à montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1}(x_n) \leq 0$ .

L'un ou l'autre des deux cas nous ramènent au calcul du signe de  $f_n(x_{n+1})$  ou de  $f_{n+1}(x_n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Comme on ne connaît pas d'expression simple de  $x_n$  ni de  $x_{n+1}$ , on ne peut alors qu'utiliser la définition de ces nombres (i.e. :  $f_n(x_n) = 0$  ou :  $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ ). Il faut alors comparer, pour tout réel  $x$ ,  $f_n(x)$  et  $f_{n+1}(x)$ , afin de pouvoir comparer ensuite ces quantités soit pour  $x_n$ , soit pour  $x_{n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Comme il est généralement plus facile d'obtenir, pour tout réel  $x$  et tout entier  $n$ , une expression de  $f_{n+1}(x)$  en fonction de  $f_n(x)$  que l'inverse, on peut plus facilement obtenir le signe de  $f_{n+1}(x_n)$  que celui de  $f_n(x_{n+1})$ . De ce fait, **l'option B doit être privilégiée**.

La méthode peut être étendue sans difficulté au cas de fonctions  $f_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) décroissantes, et/ou au cas d'une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroissante.

### 3. Conclusion sur la convergence et calcul éventuel de limite

Une fois les variations de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  connues, il suffit généralement d'appliquer le théorème de la limite monotone. Pour déterminer un majorant ou un minorant, on peut se ramener au tableau de variations de  $f$  et encadrer  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par une suite dont la limite est connue.


On peut également utiliser directement le théorème de l'encadrement si l'on parvient à encadrer  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par deux suites de même limite finie, auquel cas l'étude de la monotonie n'est pas nécessaire (même si elle est parfois demandée par l'énoncé) pour conclure quant à la nature de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Inversement, on peut aussi montrer que  $x_n$  diverge en montrant que cette suite est majorée par une suite de limite  $-\infty$  (ou l'inverse).

### 4. Recherche d'équivalents

Pour déterminer un équivalent de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on peut :

- se ramener aux méthodes générales permettant de déterminer un équivalent d'une suite (voir point VI.4 ci-dessus),
- exploiter une nouvelle fois la relation  $f_n(x_n) = 0$ , en y "réinjectant" les informations obtenues sur la limite de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Cela permet généralement d'avancer et conjecturer un équivalent. Il suffit ensuite de montrer que l'équivalent conjecturé en est bien un (voir point VI.3 ci-dessus).

 Voir l'exercice "Suite définie comme solution d'une équation".