

DÉCOUVREZ L'EXCELLENCE

Optimal Sup-Spé

Groupe Ipesup



Le n°1 en Sup-Spé

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

Maths SUP - Concours scientifiques



Algèbre

Analyse

Probabilités

www.optimalsupspe.fr



SOMMAIRE

01 | ÉDITO 3

02 | ALGÈBRE

ENSEMBLES, APPLICATIONS, SOMMES	4
TRIGONOMÉTRIE CIRCULAIRE ET HYPERBOLIQUE	5
STRUCTURES ALGÈBRIQUES	6
ARITHMÉTIQUE.....	7
NOMBRES COMPLEXES.....	8
POLYNÔMES	9
SYSTEMES LINÉAIRES, MATRICES	10
ESPACES VECTORIELS.....	11
APPLICATIONS LINÉAIRES.....	12
DÉTERMINANTS	13
ESPACES PRÉHILBERTIENS ET EUCLIDIENS.....	14

03 | ANALYSE

SUITES RÉELLES	15
FONCTIONS USUELLES.....	16
FONCTIONS : LIMITES, CONTINUITÉ.....	17
FONCTIONS : DÉRIVABILITÉ, CONVEXITÉ.....	18
FONCTIONS : UNIFORME CONTINUITÉ (MPSI)	19
INTÉGRATION SUR UN SEGMENT.....	20
DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS	21
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	22

04 | PROBABILITÉS

DÉNOMBREMENTS	23
PROBABILITÉS CLASSIQUES	24
VARIABLES ALÉATOIRES	25
VARIABLES A DENSITÉ	26



FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES



MPSI, PCSI, PTSI, BCPST - CONCOURS SCIENTIFIQUES

Formulaire Maths Sup

Retrouvez ci-dessous les théorèmes et les formules les plus importants de votre cours de mathématiques de première année.



Point méthode

Utiliser le formulaire.

Ce formulaire est un outil pour vous permettre de réviser vos définitions, vos formules, ainsi que les théorèmes les plus importants du cours de première année de prépa scientifique. Je vous conseille de regarder une de nos vidéos pédagogiques sur un thème de votre choix, puis d'identifier à l'aide de ce formulaire les équations les plus importantes du chapitre ! Pour l'année prochaine, il faudra bien connaître le cours afin de pouvoir tirer le meilleur profit de ce document. Bon travail à tous.

ENSEMBLES, APPLICATIONS, SOMMES

Partition. $\{A_i\}_{i \in I}$ est une partition de Ω si :

- $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset,$
- $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset,$
- $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega.$

Ensemble stable. A est stable par f si : $f(A) \subset A$, i.e. si : $\forall x \in A, f(x) \in A.$

Relation d'ordre. $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E si :

- $\mathcal{R}$ est *réflexive* : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x,$
- $\mathcal{R}$ est *transitive* : $\forall (x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z,$
- $\mathcal{R}$ est *antisymétrique* : $\forall (x, y, z) \in E^3, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y.$

Relation d'équivalence. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E si :

- $\mathcal{R}$ est *réflexive*
- $\mathcal{R}$ est *transitive*
- $\mathcal{R}$ est *symétrique* : $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x.$

Image directe. Avec $f : E \rightarrow F$ et $A \subset E$: $f(A) = \{f(x), x \in A\} = \{y \in F, \exists x \in A, f(x) = y\}.$

Image réciproque. Avec $f : E \rightarrow F$ et $B \subset F$: $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}.$

Injections, surjections, bijections. Avec $f : E \rightarrow F$:

- f est *injective* si : $\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$
- f est *surjective* si : $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y.$
- f est *bijjective* si : $\forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y.$
- Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Sommes. $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$

Formule du binôme. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$



TRIGONOMETRIE CIRCULAIRE ET HYPERBOLIQUE

Addition. Pour tous réels a et b :

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$

Duplication. Pour tout réel x :

- $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x.$
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x.$
- $\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ (sous réserve d'existence).

Transformation de sommes en produits. Pour tous réels a et b :

- $\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b)).$
- $\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b)).$
- $\sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a + b) - \sin(a - b)).$

Tangente de l'arc moitié. Avec $t = \tan \frac{x}{2}$, on a : $\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$, $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $\tan x = \frac{2t}{1 - t^2}$.

Transformation de sommes en produits. Pour tous réels p et q :

- $\cos p + \cos q = 2 \cos \left(\frac{p + q}{2} \right) \cos \left(\frac{p - q}{2} \right).$
- $\sin p + \sin q = 2 \sin \left(\frac{p + q}{2} \right) \cos \left(\frac{p - q}{2} \right).$

Trigonométrie hyperbolique. Pour tout réel x :

- $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$
- $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$
- $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$
- $\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x = 1.$

STRUCTURES ALGÈBRIQUES

Groupe. Un ensemble G muni d'une loi de composition interne $*$ est un **groupe** si :

- la loi $*$ est **associative** ($\forall (x, y, z) \in G^3, (x * y) * z = x * (y * z)$),
- G admet un **élément neutre** pour la loi $*$ ($\exists e \in G, \forall x \in G, x * e = e * x = x$),
- tout élément de G est **inversible** (ie. admet un **symétrique**) pour la loi $*$ ($\forall x \in G, \exists x' \in G, x * x' = x' * x = e$).

Sous-groupe. $H \subset G$ est un **sous-groupe** de $(G, *)$ si :

- H contient l'**élément neutre** de G pour la loi $*$,
- H est **stable** pour la loi $*$ ($\forall (x, y) \in H^2, x * y \in H$),
- $\forall a \in H, a^{-1} \in H$.

Caractérisation d'un sous-groupe : H est un sous-groupe de $(G, *)$ si et seulement si :

- H est non vide,
- $\forall (x, y) \in H^2, x * y^{-1} \in H$.

Groupe commutatif. G est un groupe **commutatif** si la loi $*$ est **commutative** ($\forall (x, y) \in G^2, x * y = y * x$).

La loi de composition est alors souvent notée $+$.

Groupe cyclique. G est un groupe **cyclique** si le groupe G est fini (ie. il admet un nombre fini d'éléments, et admet un générateur).

Morphisme de groupe. f est un **morphisme de groupes** de $(G_1, *_1)$ sur $(G_2, *_2)$ si : $\forall (x, y) \in G_1^2, f(x *_1 y) = f(x) *_2 f(y)$. On dit que f est un **isomorphisme** de groupe si f est de plus **bijective**.

Anneau. Un ensemble A non vide muni de deux lois de compositions internes $+$ et $*$ est un anneau si :

- $(A, +)$ est un **groupe commutatif**,
- la loi $*$ est **associative** et **distributive** par rapport à la loi $+$,
- A admet un **élément neutre** pour la loi $*$.

Sous-anneau. $B \subset A$ est un **sous-anneau** de $(A, +, *)$ si :

- B est un **sous-groupe** de $(A, +)$,
- B est **stable** pour la loi $*$ ($\forall (x, y) \in B^2, x * y \in B$),
- B contient l'**élément neutre** de A pour la loi $*$.

Caractérisation d'un sous-anneau : B est un sous-anneau de $(A, +, *)$ si et seulement si :

- B est **stable** pour la loi $*$ ($\forall (x, y) \in B^2, x * y \in B$),
- B contient l'**élément neutre** de A pour la loi $*$,
- $\forall (x, y) \in B^2, (x + (-y)) \in B$ (où $(-y)$ désigne le symétrique de y pour la loi $+$).

Idéaux. Une partie non vide I d'un anneau commutatif $(A, +, *)$ est un **idéal** de A si :

- I est stable pour la loi $+$,
- $\forall (a, i) \in A \times I, (a * i) \in I$.

Intégrité. Un anneau $(A, +, *)$ est dit **intègre** s'il est **non nul** ($0_A \neq 1_A$ ie. $A = \{0_A\}$), **commutatif** et si : $\forall (a, b) \in A^2, a * b = 0_A \implies a = 0_A$ ou $b = 0_A$.

Corps. Un ensemble K non vide muni de deux lois de compositions internes $+$ et $*$ est un **corps** si :

- $(K, +, *)$ est un **anneau** non réduit à $\{0_K\}$, où $\{0_K\}$ est l'élément neutre de K pour la loi $+$.
- la loi $*$ est **commutative**,
- tout élément de K $\setminus \{0_K\}$ admet un **symétrique** pour la loi $*$.

Sous-corps. $L \subset K$ est un **sous-corps** de $(K, +, *)$ si :

- L est un **sous-anneau** de $(K, +, *)$,
- $(L, +, *)$ est un **corps**.



ARITHMÉTIQUE

Sauf précision, les notations a, b, q, r, u, v représentent toutes des entiers relatifs de l'ensemble $\mathbb{Z}$.

Divisibilité. b est un **diviseur** de a s'il existe un entier relatif q tel que : $a = bq$. On dit aussi " b divise a " ou " a est un multiple de b " et on note $b|a$.

Division euclidienne. $\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* : \exists ! (q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, a = bq + r$ avec $r \in \llbracket 0, b - 1 \rrbracket$. On dit alors que : q est le **quotient**, r est le **reste**, a est le **dividende**, b est le **diviseur** de la **division euclidienne**.

Nombres premiers. Un nombre $p \in \mathbb{N}^*$ est dit **premier** si $p \neq 2$ et si p admet exactement 4 diviseurs : 1, -1 , p , et $-p$. *Attention : 1 n'est pas un nombre premier*

Décomposition en produit de facteurs premiers

NOMBRES COMPLEXES

Exponentielle complexe. $\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Les deux écritures d'un nombre complexe non nul.

- $z = a + ib = re^{i\theta} = r \cos \theta + i r \sin \theta$.
- $\bar{z} = a - ib = re^{-i\theta} = r \cos \theta - i r \sin \theta$. $z\bar{z} = |z|^2$.
- $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. $\cos \theta = \frac{a}{r}$, $\sin \theta = \frac{b}{r}$, $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{b}{r+a}$.

Inégalité triangulaire. $\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2, |x + y| \leq |x| + |y|$.

Formule de MOIVRE. $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. En particulier :

- $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \cos n\theta = \operatorname{Re}((\cos \theta + i \sin \theta)^n)$.
- $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \sin n\theta = \operatorname{Im}((\cos \theta + i \sin \theta)^n)$.

Formules d'EULER. Pour tout réel θ :

- $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$.
- $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Fonction exponentielle complexe. $\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z) = e^{\operatorname{Re} z} e^{i \operatorname{Im} z}$. Pour tous complexes z et z' :

- $\exp(z + z') = \exp(z) \exp(z')$.
- $\frac{1}{\exp z} = \exp(-z)$.
- $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$.
- $\exp(z) = \exp(z') \Leftrightarrow z = z' \equiv 2i\pi$.

Groupe $(\mathbb{U}, \times)$. On note : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. $\mathbb{U}$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, groupe $(\mathbb{U}_n, \times)$. Avec $n \geq 2$ et $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$:

- **Racines.** L'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1 est l'ensemble $\mathbb{U}_n = \left\{ \omega^k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$. $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$. Si z est racine de l'unité, $\bar{z}$ l'est aussi.
- **Somme.** $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0$.
- **Produit.** $\prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = (-1)^{n-1}$.

Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un complexe non nul. Avec $n \geq 2$ et $z = re^{i\theta}$:

- **Racines.** L'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de z est l'ensemble $\left\{ \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \right\}$.
- **Somme.** La somme des racines $n^{\text{ièmes}}$ de z vaut 0.
- **Produit.** Le produit des racines $n^{\text{ièmes}}$ de z vaut $(-1)^{n-1} z$.



POLYNÔMES

Définitions. Si $P = P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$, P est de degré n , de coefficient dominant a_n , de monôme de plus haut degré $a_n X^n$.

Racines, ordre de multiplicité.

- λ est racine de $P \Leftrightarrow P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (X - \lambda)$ divise P .
- λ est racine de P d'ordre de multiplicité $k \Leftrightarrow ((X - \lambda)^k \text{ divise } P \text{ et } (X - \lambda)^{k+1} \text{ ne divise pas } P)$.
- λ est racine de P d'ordre de multiplicité $k \Leftrightarrow (\forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket P^{(i)}(\lambda) = 0 \text{ et } P^{(k)}(\lambda) \neq 0)$.

Théorème de D'ALEMBERT. Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine complexe. Corollaire : tout polynôme de degré n admet exactement n racines complexes, en tenant compte des ordres de multiplicité.

Polynômes irréductibles.

- Un polynôme P est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ si P n'admet aucun diviseur trivial (i.e. les constantes non nulles et les multiples non nuls de P) dans $\mathbb{K}[X]$.
- Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.
- Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 2 n'admettant aucune racine réelle.
- Tout polynôme s'écrit de façon unique (à l'ordre près) sous forme de produit de polynômes irréductibles.

Polynômes scindés. Un polynôme P est scindé sur $\mathbb{K}$ s'il s'écrit sous la forme : $P(X) = \alpha \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$, où α et les λ_i sont éléments de $\mathbb{K}$. On dit que P est scindé à racines simples si les λ_k sont distincts. Dans $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme non constant est scindé sur $\mathbb{C}$.

Décomposition d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$. Si P a pour coefficient dominant α , pour racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, d'ordres de multiplicité respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, alors : $P(X) = \alpha \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$.

Décomposition d'un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$. Si P a pour coefficient dominant α , pour racines réelles $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, d'ordres de multiplicité respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, et pour racines complexes conjuguées $\mu_1, \bar{\mu}_1, \mu_2, \bar{\mu}_2, \dots, \mu_m, \bar{\mu}_m$, d'ordres de multiplicité respectifs $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$, alors : $P(X) = \alpha \left[\prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\alpha_k} \right] \left[\prod_{k=1}^m \left(X^2 - 2 \operatorname{Re}(\mu_k) X + |\mu_k|^2 \right)^{\beta_k} \right]$.

Formule de TAYLOR pour les polynômes. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{C}_n[X], \forall a \in \mathbb{C}, P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{(X-a)^k}{k!} P^{(k)}(a)$.

Polynômes d'interpolation de LAGRANGE.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour toute n -liste $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'éléments distincts de $\mathbb{C}$ et pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe un unique polynôme $L_j \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que : $L_j(x_i) = \delta_{i,j}$.
- $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, L_j(X) = \prod_{1 \leq i \leq n, i \neq j} \frac{X - x_i}{x_i - x_j}$. La famille $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ forme une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour toute n -liste $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'éléments distincts de $\mathbb{C}$ et pour toute n -liste $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ d'éléments de $\mathbb{C}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(x_i) = y_i$.
- Cet unique polynôme est égal à : $P(X) = \sum_{i=1}^n y_i L_i$.

SYSTÈMES LINÉAIRES, MATRICES

Notations. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes. $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau non commutatif (i.e. : il existe A et B telles que $AB \neq BA$), et non intègre (i.e. il existe A et B non nulles telles que $AB = 0$).

Produit. Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$, alors, en notant $C = AB = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a :
 $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, c_{i,j} = \sum_{k=1}^m a_{i,k} b_{k,j}.$

Formule du binôme. $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \underline{AB = BA}, \forall n \in \mathbb{N}, (A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$

Systèmes linéaires. Soit $(S) : AX = B$ un système linéaire d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

- (S) est *homogène* si $B = 0$.
- (S) est *compatible* s'il admet au moins une solution.
- (S) est *indéterminé* s'il admet plusieurs solutions.
- (S) est *impossible* s'il n'admet aucune solution.
- (S) est *de CRAMER* s'il admet une unique solution.

Transformations élémentaires. Les transformations élémentaires suivantes transforment un système (resp. une matrice carrée) en un système équivalent (resp. une matrice équivalente) :

- l'ajout d'un multiple d'une ligne à une autre ligne ($L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, où $\lambda \in \mathbb{K}$).
- la multiplication d'une ligne par une constante non nulle ($L_i \leftarrow \alpha L_i$, où $\alpha \in \mathbb{K}^*$).
- l'échange de deux lignes : ($L_i \leftrightarrow L_j$).

Transposée. tA est la matrice obtenue à partir de A en échangeant les lignes et les colonnes.

Matrices inversibles : définition. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I$.

Matrices inversibles : caractérisations. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si l'une de ces conditions équivalentes est réunie :

- $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = I$ ou $BA = I$.
- il existe une suite de transformations élémentaires sur les lignes de A menant à une matrice inversible (en particulier : à une matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls).
- A est la matrice représentative d'un isomorphisme.
- A est un produit de matrices inversibles (et on a alors, si $A = PQ : A^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$.)
- tA est inversible (et on a alors : $({}^tA)^{-1} = {}^tA^{-1}$).
- A est une matrice de passage.
- pour toute matrice colonne $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ est de CRAMER.
- le système $AX = 0$ admet $X = 0$ pour unique solution.
- $\det A \neq 0$ (voir le FORMULAIRE **Déterminants**).

Rang d'une matrice. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Le rang de A est le nombre de pivots de la réduite échelonnée par lignes de la matrice A (matrice obtenue par suite de transformations élémentaires selon la méthode de GAUSS, voir exemples vus en classe)
- Si A représente un endomorphisme f , alors : $\text{rg } A = \text{rg } f = \dim \text{Im } f$.
- $\text{rg } {}^tA = \text{rg } A$.
- Les transformations élémentaires sur les lignes (resp. colonnes) de A conservent le rang de A - et, en particulier, son caractère inversible ou non, s'il s'agit d'une matrice carrée.



ESPACES VECTORIELS

$(E, +, \cdot)$ désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Les éléments u_i sont éléments de E et les λ_i sont éléments de $\mathbb{K}$.

Sous-espace vectoriel. F est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$ si $F \subset E$, si $F \neq \emptyset$, et si F est stable par loi $+$ et par la loi $\cdot$, i.e. si : $\forall (u, v) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, (\lambda u + \mu v) \in F$. En particulier, sont des sous-espaces vectoriels de E : tout espace s'écrivant sous forme $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$, $\text{Ker } f$ (si f est une application linéaire définie sur E) ou encore $\text{Im } f$ (si f est une application linéaire à valeurs dans E).

Combinaison linéaire On dit que u est combinaison linéaire de $u_1, u_2, \dots, u_n$ si il existe une n -liste $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que : $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$. L'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1, u_2, \dots, u_n$ est noté $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Famille libre. $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une famille libre de E si : $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = 0$.

Famille liée. $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une famille liée de E si ce n'est pas une famille libre de E , i.e. si au moins un des éléments de cette famille est combinaison linéaire des autres.

Famille génératrice. $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est génératrice de E si : $\forall u \in E, \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$.

Base. $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base de E si c'est une famille libre et génératrice de E , i.e. si : $\forall u \in E, \exists! (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$.

Liens en dimension finie. Si E est de dimension finie n :

- Toute famille libre de E admet au maximum n éléments (on dit dans ce cas qu'elle est maximale). Toute famille libre et maximale de E est une base de E .
- Toute famille génératrice de E admet au maximum n éléments (on dit dans ce cas qu'elle est minimale). Toute famille libre et minimale de E est une base de E .

Théorème de la base incomplète. Si $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une famille libre de E , alors (avec certains vecteurs bien choisis de E), on peut la compléter en une base $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de E .

Sommes, sommes directes. La somme de deux s.e.v. F et G de E est donnée par : $F + G = \{x + y, x \in F, y \in G\}$. La somme $F + G$ est directe si cette décomposition est unique pour tout élément de $F + G$. F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires. F et G sont supplémentaires dans E (et l'on note $F + G = F \oplus G$) si l'une de ces conditions est remplie :

- $\forall x \in E, \exists! (y, z) \in F \times G, x = y + z$,
- $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$,
- F et G sont respectivement le noyau et l'image d'un projecteur p de E ,
- $F = \text{Ker}(s - id)$ et $G = \text{Ker}(s + id)$, où s est une symétrie de E ,
- $F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$,
- la juxtaposition d'une base de F et d'une base de G est une base de E ,
les deux dernières méthodes n'étant applicables qu'en dimension finie.

APPLICATIONS LINÉAIRES

E et F désignent deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F .

Définition. f est linéaire si : $\forall (u, v) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.

Noyau. $\text{Ker } f = \{u \in E, f(u) = 0\}$. $\text{Ker } f$ est un s.e.v. de E . $\text{Ker } f = \{0\} \Leftrightarrow f$ est injective.

Image. $\text{Im } f = \{v \in F, \exists u \in E, f(u) = v\} = \{f(u), u \in E\}$. $\text{Im } f$ est un s.e.v. de F , et : $\text{Im } f = F \Leftrightarrow f$ est surjective. Si E est de dimension finie et a pour famille génératrice $(u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\text{Im } f = \text{Vect}(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n))$.

Formule du rang. Si E est de dimension finie : $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim E$.

Propriété. Si E et F sont de même dimension finie : f est injective $\Leftrightarrow f$ est surjective.

Droites, plans, hyperplans.

- Un s.e.v. de E est une droite s'il est de dimension 1, un plan s'il est de dimension 2, un hyperplan s'il est le supplémentaire d'une droite dans E . Si E est de dimension finie, un hyperplan de E est un s.e.v. de E de dimension $n - 1$.
- Tout vecteur non nul d'une droite vectorielle en forme une base.
- Les noyaux des formes linéaires non nulles sur E sont les hyperplans de E . Démonstration à connaître, à l'aide de la formule du rang et du théorème de la base incomplète.

Endo-, iso-, automorphismes.

- f est un endomorphisme de E si f est linéaire de E dans E .
- f est un isomorphisme de E si f est linéaire et bijective de E dans F .
- f est un automorphisme de E si f est linéaire bijective de E dans E .
- f est une forme linéaire sur E si f est linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Caractérisation des isomorphismes. f est un isomorphisme de E dans F si et seulement si l'une de ces conditions (équivalentes) est remplie :

- $\forall v \in F, \exists ! u \in E, f(u) = v$.
- Il existe g , linéaire de F dans E , telle que $f \circ g = \text{id}$ et $g \circ f = \text{id}$.
- f est injective ($\text{Ker } f = \{0\}$) et f est surjective ($\text{Im } f = F$).
Si $\dim E = \dim F$, f est un isomorphisme si, et seulement si :
- f est injective ou surjective, les deux propositions étant alors équivalentes.
- f transforme une base (ou "toute base") de E en une base de F .
- la matrice représentative de f est inversible.

Projecteurs. Soient E_1 et E_2 deux s.e.v. supplémentaires dans E . Tout élément de E s'écrit sous forme $x_1 + x_2$, où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. La projection p sur E_1 parallèlement à E_2 associe à tout $x \in E$ sa composante $x_1 \in E_1$. On a :

- $\text{Ker } p = E_2$, $\text{Im } p = E_1$ et ainsi : $\text{Ker } p \oplus \text{Im } p = E$.
- $\text{Ker}(p - \text{id}) = E_1$ et $\text{Im}(p - \text{id}) = E_2$, et ainsi : $\text{Ker}(p - \text{id}) \oplus \text{Im}(p - \text{id}) = E$.
- p est un projecteur si et seulement si p est linéaire et vérifie $p \circ p = p$.

Symétries. En conservant les notations précédentes, la symétrie s d'axe E_2 associe à tout $x \in E$ écrit sous forme $x = x_1 + x_2$, l'élément $x_1 - x_2$. On a :

- $\text{Ker}(s - \text{id}) = E_2$, $\text{Ker}(s + \text{id}) = E_1$ et ainsi : $\text{Ker}(s - \text{id}) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}) = E$.
- $\text{Im}(s - \text{id}) = E_1$ et $\text{Im}(s + \text{id}) = E_2$, et ainsi : $\text{Im}(s - \text{id}) \oplus \text{Im}(s + \text{id}) = E$.
- s est une symétrie si et seulement si s est linéaire et vérifie $s \circ s = \text{id}$.



DÉTERMINANTS

Déterminant d'une matrice carrée. Le déterminant, noté $\det$, est l'unique application f définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ telle que :

- f est *linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable*, i.e : pour toute matrice $M = (C_1, \dots, C_n)$, où les C_i sont les colonnes de M l'application qui à $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ associe $f(C_1, \dots, C_p, X, C_{p+1}, \dots, C_n)$ est linéaire.
- f est *antisymétrique par rapport à chacune des colonnes de sa variable*, i.e : pour toute matrice $M = (C_1, \dots, C_n)$, l'image par f d'une matrice obtenue en permutant deux colonnes de M est égal à $-f(M)$.
- $f(I_n) = 1$.

Propriétés. Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

- $\det AB = \det BA = (\det A)(\det B)$.
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
- $\det {}^t A = \det A$.
- A est inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$, et on a alors : $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

Déterminant d'une famille de vecteurs. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E , $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, u_i soit représenté par C_i dans la base $\mathcal{B}$. On appelle déterminant de $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ dans la base $\mathcal{B}$, le déterminant de la matrice $A = (C_1, \dots, C_n)$.

Invariance par changement de base.

- Le déterminant ne dépend pas de la base choisie.
- Si A et B sont semblables, alors : $\det A = \det B$.

Déterminant d'un endomorphisme. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $\det f = \det A$, où A représente f dans n'importe quelle base de E . Si f et g sont deux endomorphismes de E , on a alors :

- $\det(fog) = \det(gof) = (\det f)(\det g)$.
- $\det(\lambda f) = \lambda^n \det f$.
- f est un isomorphisme $\Leftrightarrow \det f \neq 0$, et on a alors : $\det f^{-1} = \frac{1}{\det f}$.

ESPACES PRÉHILBERTIENS ET EUCLIDIENS

E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Produit scalaire. $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E si $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est une application de E^2 :

- *symétrique* : $\forall (u, v) \in E^2, \langle u | v \rangle = \langle v | u \rangle$,
- *bilinéaire* : $\forall (u, v, w) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \langle u + \lambda u' | v \rangle = \lambda \langle u | v \rangle + \langle u' | v \rangle$,
- *définie-positive* : $\forall u \in E, \langle u | u \rangle \geq 0$ et : $(\langle u | u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0)$.

On appelle alors norme de u la quantité : $\|u\| = \sqrt{\langle u | u \rangle}$.

$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est alors appelé espace préhilbertien. Il est dit euclidien si E est de dimension finie.

Produit scalaires usuels.

- Si, pour tous $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ appelé produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
- Si, pour tous $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\Phi(X, Y) = {}^t X Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, Φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ appelé produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$ et si $\Phi(f, g) = \int_a^b f(t)g(t) dt$, Φ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ appelé produit scalaire canonique de $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. $\forall (u, v) \in \mathbb{E}^2, |\langle u | v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$.

Orthogonalité.

- $(x, y) \in \mathbb{E}^2$ sont orthogonaux si : $\langle u | v \rangle = 0$. On le note $u \perp v$.
- Deux sous espaces vectoriels de E notés F et G sont orthogonaux si : $\forall (u, v) \in F \times G, \langle u | v \rangle = 0$.
- L'orthogonal de F dans E est $F^\perp = \{u \in E \mid \forall v \in F, u \perp v\}$.
- F et $F^\perp$ sont en somme directe. Ils sont supplémentaires si E est de dimension finie.

Projecteur orthogonal.

- p est un projecteur orthogonal si $\text{Ker } p = (\text{Im } p)^\perp$. p projette sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$.
- Si $x \in E$ alors y est le projeté orthogonal de x sur l'espace vectoriel F si : $y \in F$ et : $(x - y) \in F^\perp$.
- Le projeté orthogonal minimise la distance : $y \in F$ et : $\forall z \in F, \|x - y\| \leq \|x - z\|$.

Bases orthogonales et orthonormales.

- Une base $(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n)$ de E est orthogonale si tous les vecteurs qui la composent sont deux à deux orthogonaux.



SUITES

Suites arithmétiques. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r à partir du terme u_p , alors :

- $\forall n \geq p, u_n = u_p + (n - p)r,$
- $\forall n \geq p, \sum_{k=p}^n u_k = (n - p + 1) \frac{u_p + u_n}{2}.$

Suites géométriques. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison q à partir du terme u_p , alors :

- $\forall n \geq p, u_n = q^{n-p} u_p,$
- Si $q \neq 1 : \forall n \geq p, \sum_{k=p}^n u_k = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}.$

Définition de la convergence. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$

Théorème de convergence les plus importants.

- **Théorème de la limite monotone.** Toute suite croissante admet une limite finie ou égale à $+\infty$. Toute suite croissante et majorée converge vers sa borne supérieure. Résultats analogues pour les suites décroissantes.
- **Théorème de l'encadrement.** Si à partir d'un certain rang : $u_n \leq v_n \leq w_n$, et si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune ℓ , alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .
- **Théorème de prolongement des inégalités.** Si à partir d'un certain rang : $u_n \leq v_n$, et si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers ℓ et ℓ' , alors : $\ell \leq \ell'.$

Comparaison de suites.

- **Suites négligeables.** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et l'on note $u_n = o(v_n)$, si il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0 : u_n = \varepsilon_n v_n$, où : $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$
- **Suites équivalentes.** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et l'on note $u_n \sim v_n$, si $u_n - v_n = o(v_n)$, i.e. si il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0 : u_n = h_n v_n$, où : $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$

Equivalents usuels. Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, alors :

- $\ln(1 + u_n) \sim u_n,$
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n,$
- $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n,$
- $\sin u_n \sim u_n,$
- $\cos u_n - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}.$

Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$. Si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$, alors :

- Si f est croissante, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone : croissante si $u_0 \leq u_1$ et décroissante dans le cas contraire.
- Si f est décroissante, $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones de sens de variation contraires.
- Si f change de variations, on peut se ramener à un intervalle I stable par f contenant tous les termes de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang, sur lequel f soit monotone.
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ et si f est **continue** en ℓ , alors : $\ell = f(\ell).$

Sommes de RIEMANN. Si f est continue sur $[a, b]$, alors :

- $s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt.$
- $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt.$

En particulier pour $a = 0$ et $b = 1 : \frac{1}{n} \sum_{k=0 \text{ ou } 1}^{n-1 \text{ ou } n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t) dt.$

FONCTIONS USUELLES



Remarque

Les propriétés les plus élémentaires des fonctions valeur absolue, exponentielle et logarithmes, issues du cours de Terminale S, ne sont pas reprises ici.

Partie entière.

- $E(x)$ est l'unique entier relatif tel que : $x - 1 < E(x) \leq x$. Pour tout réel x : $E(x) \leq x < E(x) + 1$.
- La fonction partie entière est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et continue à droite en tout point de $\mathbb{Z}$.

Valeur absolue.

- $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = \max(x, 0) + \max(-x, 0)$.
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}$.

Exponentielle, logarithmes, puissances.

- Lorsque h est au voisinage de 0 : $e^h = 1 + h + o(h)$.
- Lorsque h est au voisinage de 0 : $\ln(1 + h) = h + o(h)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}, x^y = e^{y \ln x}$.

Fonctions cos, sin, tan. Voir le formulaire de trigonométrie.

Fonctions Arccos, Arcsin, Arctan.

- La fonction cos induit une bijection croissante de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. La réciproque de cette restriction est la fonction $\text{Arccos} : \forall y \in [-1, 1], \text{Arccos } y = x \in [0, \pi] / \cos x = y$.
- La fonction sin induit une bijection croissante de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$. La réciproque de cette restriction est la fonction $\text{Arcsin} : \forall y \in [-1, 1], \text{Arcsin } y = x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] / \sin x = y$.
- La fonction tan induit une bijection croissante de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. La réciproque de cette restriction est la fonction $\text{Arctan} : \forall y \in \mathbb{R}, \text{Arctan } y = x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[/ \tan x = y$.
- $\forall x \in]-1, 1[, \text{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in]-1, 1[, \text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in \mathbb{R}, \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Fonctions ch, sh, sh. Voir le formulaire de trigonométrie.

Fonctions Argch, Argsh, Argth.

- La fonction ch induit une bijection croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$. La réciproque de cette restriction est la fonction $\text{Argch} : \forall y \in [1, +\infty[, \text{Argch } y = x \in \mathbb{R}_+ / \text{ch } x = y$.
- La fonction sh est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. La réciproque de cette restriction est la fonction $\text{Argsh} : \forall y \in \mathbb{R}, \text{Argsh } y = x \in \mathbb{R} / \text{sh } x = y$.
- La fonction th induit une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$. La réciproque de cette restriction est la fonction $\text{Argth} : \forall y \in] -1, 1[, \text{Argth } y = x \in \mathbb{R} / \text{th } x = y$.
- $\forall x \in]1, +\infty[, \text{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \forall x \in \mathbb{R}, \text{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \forall x \in] -1, 1[, \text{Argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.



FONCTIONS : LIMITES ET CONTINUITÉ

Limite finie en un point. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$

Limite infinie en un point. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > A.$

Limite finie en $+\infty$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$

Limite infinie en $+\infty$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0 \Rightarrow f(x) > A.$

Définitions analogues pour des limites en un point à gauche, à droite, ou en $-\infty$, ou des limites égales à $-\infty$.

Caractérisation séquentielle. $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \ell$ si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Croissance. f est croissante sur I si : $\forall (x, y) \in I^2, (x \leq y) \Rightarrow f(x) \leq f(y).$

Définitions analogues pour la stricte croissance, la décroissance, la stricte décroissance.

Théorème les plus importants sur les limites.

- **Théorème de la limite monotone.** Toute fonction croissante sur $]a, b[$ admet en a une limite à droite, finie ou égale à $-\infty$; en b une limite à gauche, finie ou égale à $+\infty$; et en tout point $x_0 \in]a, b[$, une limite finie à droite et une limite à gauche. Résultats analogues pour les fonctions décroissantes.
- **Théorème de l'encadrement.** Si au voisinage de x_0 : $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, et si les fonctions f et g admettent une limite finie commune ℓ en x_0 , alors la fonction g admet pour limite ℓ en x_0 .
- **Théorème de prolongement des inégalités.** Si au voisinage de x_0 : $f(x) \leq g(x)$, et si les fonctions f et g admettent en x_0 une limite finie, respectivement égales à ℓ et ℓ' , alors : $\ell \leq \ell'$.

Comparaison de fonctions.

- **Fonctions négligeables.** f est négligeable devant g au voisinage de x_0 , et l'on note $f(x) = o(g(x))$, si il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 et une fonction ε de limite nulle telles que pour tout $x \in \mathcal{V}$, $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$.
- **Fonctions équivalentes.** f est équivalente à g lorsque au voisinage de x_0 , et l'on note $f(x) \sim_{x_0} g(x)$, si $f(x) - g(x) = o(g(x))$, i.e. si il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 tel que pour tout $x \in \mathcal{V}$, $f(x) = h(x)g(x)$, où $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 1$.

Equivalents usuels.

- $\ln(1+x) \sim_0 x.$
- $\ln u \sim u - 1.$
- $e^x - 1 \sim_0 x.$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x.$
- $\sin x \sim_0 x.$
- $\cos x - 1 \sim_0 -\frac{x^2}{2}.$

Continuité. f est continue en x_0 si : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, i.e. : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$ f est continue sur I si f est continue en tout point de I . Les opérations élémentaires conservent la continuité. Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes sur ce segment.

Théorème des valeurs intermédiaires. Si f est continue sur $[a, b]$, alors pour toute valeur intermédiaire λ strictement comprise entre $f(a)$ et $f(b)$: $\exists c \in]a, b[, f(c) = \lambda$. Si f est strictement monotone, cette solution est unique (théorème dit "de la bijection"). La fonction réciproque f^{-1} est alors continue et de même monotonie que f .

Fonctions lipschitziennes. f est k -lipschitzienne sur I si $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Toute fonction lipschitzienne est continue.

FONCTIONS : DÉRIVABILITÉ, CONVEXITÉ

Définition. f est dérivable en x_0 si son taux d'accroissement admet au point x_0 une limite finie, i.e. si :
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R}$, soit avec $h = x - x_0$, si et seulement si : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell$. Toute fonction dérivable en un point y est continue. La réciproque est fautive. f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I . Définitions analogues pour la dérivabilité à gauche, à droite.

Opérations. Les opérations les plus élémentaires, issues du cours de Terminale S, ne sont pas reprises ici.

- $(f^n)' = n f' f^{n-1}$ (si $n \geq 1$).
- $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$.
- $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ (sous réserve que le dénominateur ne s'annule pas).

Formule de Leibniz. Si f et g sont n fois dérivables sur I , alors fg est n fois dérivable sur I , et :

$$\forall x \in I, (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \times g^{(n-k)}(x).$$

Fonction de classe $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^n, \mathcal{C}^\infty$. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I . f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I . f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I . Les opérations élémentaires conservent la classe.

Théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b]$, continue en a , et si f' admet en a une limite finie à droite notée ℓ , alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, et : $f'(a) = \ell$.

Théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]a, b]$, continue en a , et si $f^{(n)}$ admet en a une limite finie à droite notée ℓ , alors $f^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$, et : $f^{(n)}(a) = \ell$.

Théorèmes importants. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

- **Théorème de Rolle.** Si $f(a) = f(b)$, alors : $\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$.
- **Théorème des accroissements finis.** Plus généralement : $\exists c \in]a, b[, f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.
- **Inégalité des accroissements finis.** Si : $\forall t \in]a, b[, m \leq f'(t) \leq M$, alors : $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.
- **Inégalité des accroissements finis (V2).** Si : $\forall t \in]a, b[, |f'(t)| \leq M$, alors : $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$.

Remarque : parmi ces théorèmes, seuls le théorème des accroissements finis s'étend aux valeurs complexes.

Fonctions convexes. f est convexe sur I si : $\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, f est convexe si et seulement si f'' est positive. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, f est convexe si et seulement si f' est croissante. La courbe représentative de f est alors située au dessus de ses tangentes et en dessous de ses cordes. Définitions et propriétés analogues si f est concave. f est concave si $-f$ est convexe.

Inégalité de JENSEN. Si f est convexe sur I , l'image d'un barycentre est inférieure ou égale au barycentre des images : $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n, \forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n / \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1, f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$.

Représentation graphique. En notant $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f :

- **Tangente.** Si $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie en a , la droite d'équation $x = a$ est tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a . Si f est dérivable en a , $\mathcal{C}$, la droite d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ est tangente à $\mathcal{C}$ en a .
- **Point d'inflexion.** $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion en a si f'' s'annule en changeant de signe en a .
- **Symétrie axiale.** Si $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(2a - x) = f(x)$, alors la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}$.
- **Symétrie centrale.** Si $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(2a - x) = 2b - f(x)$, alors le point (a, b) est un centre de symétrie de $\mathcal{C}$.



FONCTIONS : UNIFORME CONTINUITÉ

Définition. f est uniformément continue sur I si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, x') \in I^2, |x - x'| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.
Toute fonction uniformément continue est continue.

Théorème de Heine. Si f est continue sur un segment, alors f est uniformément continue sur ce segment.

Fonctions lipschitziennes. f est k -lipschitzienne sur I si $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k |x - y|$. Toute fonction lipschitzienne sur I est uniformément continue sur I .

Exemple à connaître. La fonction racine carrée est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$, mais elle n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$. Elle est néanmoins lipschitzienne sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, où $a > 0$.

INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

Définition théorique. L'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est définie comme la valeur commune de (1) : la borne supérieure de l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier minorant f , et (2) : la borne inférieure de l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier majorant f .

Primitive et Intégrale. Toute fonction continue sur $[a, b]$ y admet une primitive, notée F . $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.
Toute fonction de la forme $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$, où $a \in \mathbb{R}$, est une primitive de f s'annulant en a . Si f est continue, F est de classe $\mathcal{C}^1$.

Propriétés de l'intégration. f et g sont continues par morceaux sur $[a, b]$.

- **Chasles.** $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$.
- **Linéarité.** $\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt$.
- **Positivité.** Si $a \leq b$: si f est positive, $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.
- **Croissance.** Si $a \leq b$: si $\forall t \in [a, b], f(t) \leq g(t)$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.
- **Intégrale nulle.** Si f est continue et positive sur $[a, b]$: $\int_a^b f(t) dt = 0 \Rightarrow \forall t \in [a, b], f(t) = 0$.

Intégration par parties. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$: $\int_a^b f'(t)g(t) dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t) dt$.

Changement de variable.

- " $u = \varphi(t)$ ". Si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$: $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du$.
- " $t = \varphi(u)$ ". Si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$, avec $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$, alors : $\int_a^b f(t) dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) du$.

Sommes de RIEMANN. Si f est continue sur $[a, b]$, alors :

- $s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt$.
- $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt$.

En particulier pour $a = 0$ et $b = 1$: $\frac{1}{n} \sum_{k=0 \text{ ou } 1}^{n-1 \text{ ou } n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t) dt$.

Valeur moyenne. $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$ est la valeur moyenne de f sur $[a, b]$. $\exists c \in]a, b[, \mu = f(c)$.



DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Formule de TAYLOR avec reste intégral. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b], \mathbb{R})$:

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Formule de TAYLOR-LAGRANGE. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b], \mathbb{R})$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Inégalité de TAYLOR-LAGRANGE. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b], \mathbb{R})$:

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)|$$

Formule de TAYLOR-YOUNG. Si $f \in \mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R})$, lorsque x est au voisinage de a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n).$$

Développements limités usuels. Lorsque x est au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}
 & \text{— } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1}). \\
 & \text{— } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p}). \\
 & \text{— } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n). \\
 & \text{— } \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}). \\
 & \text{— } \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}). \\
 & \text{— } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n). \\
 & \text{— } (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n). \\
 & \text{— } \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n). \\
 & \text{— } \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n).
 \end{aligned}$$

Développements limités et continuité, dérivabilité, fonction de classe $\mathcal{C}^n$. Si f est définie en a :

- f admet un d.l.(0) au voisinage de a si et seulement si f est continue en a .
- f admet un d.l.(1) au voisinage de a si et seulement si f est dérivable en a .
- Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de a , alors f admet un d.l.(n) au voisinage de a . La réciproque est fausse.

Développements limités et dérivée, primitive. Si f est définie en a et $n \geq 1$:

- Si f admet un d.l.(n) au voisinage de a , alors f' admet un d.l.($n-1$) au voisinage de a obtenu en dérivant terme à terme le d.l.(n) de f en a .
- Si f admet un d.l.(n) au voisinage de a , alors toute primitive F de f admet un d.l.($n+1$) au voisinage de a obtenu en intégrant (à une constante près) le d.l.(n) de f en a .

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Méthodes importantes.

D'une solution particulière à la solution complète. Si (L) est une équation linéaire, d'équation homogène associée (H) , et si f_0 est une solution particulière de (L) , alors $(f \text{ est solution de } (L)) \Leftrightarrow (f - f_0 \text{ est solution de } (H))$.

Méthode de variation de la constante. On conserve les notations précédentes. But : trouver une solution particulière de (L) . On trouve la solution générale de (H) . On considère une solution particulière de (H) , notée g_0 , qui ne s'annule pas. Puis on cherche à quelle condition la fonction $f_0 : t \rightarrow \lambda(t)g_0(t)$ est solution de (L) .

Principe de superposition des solutions. But : trouver une solution particulière de (L) . Si le second membre d'une équation (L) est une somme de fonctions, on cherche des solutions particulières pour chacune des équations induites. La superposition (i.e. la somme) de toutes les solutions particulières est une solution particulière de (L) .

Résolution des équations au programme sur un intervalle I .

Equation $y' + ay = 0$. $y' + ay = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I, y(t) = \lambda e^{-A(t)}$, où A est une primitive de la fonction a , et où λ décrit $\mathbb{R}$.

Solution particulière de l'équation $y' + ay = p$, où p est un polynôme. Deux cas se présentent :

- Si $a \neq 0$, l'équation admet une solution polynomiale de degré n .
- Si $a = 0$, l'équation admet une solution polynomiale de degré $n + 1$.

Solution particulière de l'équation $y' + ay = p(t)e^{mt}$, où p est un polynôme. L'équation admet une solution particulière de la forme $t \mapsto q(t)e^{mt}$. Deux cas se présentent :

- Si $a \neq m$, $\deg q = n$.
- Si $a = m$, $\deg q = n + 1$.

Equation $ay'' + by' + cy = 0$, cas où a, b, c sont réels. On considère le discriminant Δ de l'équation caractéristique $(E) : ar^2 + br + c = 0$. Si $\Delta > 0$, (E) admet deux solutions réelles notées x_1 et x_2 ; si $\Delta = 0$, une unique solution notée x_0 ; si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées notées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$. Trois cas se présentent :

- Si $\Delta > 0 : ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I, y(t) = \lambda e^{x_1 t} + \mu e^{x_2 t}$, où (λ, μ) décrit $\mathbb{R}^2$.
- Si $\Delta = 0 : ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I, y(t) = (\lambda + \mu t)e^{x_0 t}$, où (λ, μ) décrit $\mathbb{R}^2$.
- Si $\Delta < 0 : ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I, y(t) = \lambda e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t} \sin(\beta t)$, où (λ, μ) décrit $\mathbb{R}^2$.

Equation $ay'' + by' + cy = 0$, cas où a, b, c sont complexes. On considère le discriminant Δ de l'équation caractéristique $(E) : ar^2 + br + c = 0$. Si $\Delta \neq 0$, (E) admet deux solutions complexes conjuguées notées x_1 et x_2 ; si $\Delta = 0$, une unique solution notée x_0 . Deux cas se présentent :

- Si $\Delta \neq 0 : ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I, y(t) = \lambda e^{x_1 t} + \mu e^{x_2 t}$, où (λ, μ) décrit $\mathbb{R}^2$.
- Si $\Delta = 0 : ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I, y(t) = (\lambda + \mu t)e^{x_0 t}$, où (λ, μ) décrit $\mathbb{R}^2$.

Solution particulière de l'équation $ay'' + by' + cy = p$, où p est un polynôme. Trois cas se présentent :

- Si $c \neq 0$, l'équation admet une solution polynomiale de degré n .
- Si $c = 0$ et $b \neq 0$, l'équation admet une solution polynomiale de degré $n + 1$.
- Si $b = c = 0$, l'équation admet une solution polynomiale de degré $n + 2$.

Solution particulière de l'équation $ay'' + by' + cy = p(t)e^{mt}$, où p est un polynôme. L'équation admet une solution particulière de la forme $t \mapsto q(t)e^{mt}$. En notant (E) l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$, trois cas se présentent :

- Si m n'est pas racine de (E) , $\deg q = n$.
- Si m est racine simple de (E) , $\deg q = n + 1$.
- Si m est racine double de (E) , $\deg q = n + 2$.



DÉNOMBREMENTS

p-listes. Une *p-liste* (ou *p-uplet*) de E est une suite de p éléments de E . Il y a n^p p -listes d'un ensemble à n éléments.

- Notation : $(x_1, x_2, \dots, x_p)$.
- Exemple : $(1, 4, 1)$ est une 3-liste de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Ordre : OUI. Répétition possible des éléments : OUI.
- Modèle : Tirage de p boules dans une urne en contenant n , successivement et avec remise.

Arrangements. Un *arrangement* est une liste d'éléments distincts. Si $p \leq n$, il y a $n(n-1)\dots(n-p+1) = A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ arrangements à p éléments d'un ensemble à n éléments. Si $p > n$, il n'y en a aucun.

- Notation : $(x_1, x_2, \dots, x_p)$.
- Exemple : $(1, 5, 2)$ est un arrangement à 3 éléments de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Ordre : OUI. Répétition possible des éléments : NON.
- Modèle : Tirage de p boules dans une urne en contenant n , successivement et sans remise.

Permutations. Une *permutation* de E est un arrangement de tous les éléments de E . Il y a $n!$ permutations d'un ensemble à n éléments.

- Notation : $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
- Exemple : $(1, 3, 5, 4, 2)$ est une permutation de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Ordre : OUI. Répétition possible des éléments : NON.
- Modèle : Tirage de toutes les boules d'une urne en contenant n , successivement et sans remise.

Applications, injections, surjections. Soient E_p un ensemble à p éléments et F_n un ensemble à n éléments.

- Il y a autant d'applications de E_p dans F_n que de p -listes de F : n^p .
- Il y a autant d'injections de E_p dans F_n que d'arrangements à p éléments de F : A_n^p .
- Il y a autant de bijections de E_n dans F_n que de *permutations* de E : $n!$.

Parties à p éléments. Une *partie* (ou *combinaison*) de E est un sous-ensemble E . Si $p \leq n$, il y a $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ parties à p éléments d'un ensemble à n éléments. Le résultat demeure valable avec $p > n$ avec la convention $\binom{n}{p} = 0$.

- Notation : $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
- Exemple : $\{1, 3, 5\}$ est une partie à 3 éléments de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Ordre : NON. Répétition possible des éléments : NON.
- Modèle : Tirage de toutes les boules d'une urne en contenant n , simultanément.

Parties.

- En notant A l'ensemble des parties de E , et pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, A_p l'ensemble des parties à p éléments de A , $\{A_p\}_{p \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ forme une partition de A .
- $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$.
- Il y a 2^n parties de E en tout.

Coefficients binomiaux : formules

- **Formule des compléments.** $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$.
- **Petite formule.** $\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$.
- **Formule de PASCAL.** $\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$.

PROBABILITÉS SUR UN UNIVERS FINI

On se place dans un espace probabilisé (Ω, P) .

Événements incompatibles.

— A et B sont incompatibles si : $A \cap B = \emptyset$.

— Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont deux à deux incompatibles, alors : $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

Système complet. $\{A_i\}_{i \in I}$ est un système complet d'événements si :

- $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$,
- $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$,
- $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

Probabilité uniforme. En situation d'équiprobabilité : $P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$.

Probabilité conditionnelle. Si $P(B) \neq 0$: $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Formule des probabilités conditionnelles. Si $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors :
 $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) \dots P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$.

Formule des probabilités totales. Si $\{A_i\}_{i \in I}$ est un système complet d'événements tous de probabilité non nulle, alors : $P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} P_{A_i}(B)P(A_i)$.

Formule de BAYES. Si $\{A_i\}_{i \in I}$ est un système complet d'événements tous de probabilité non nulle et si $P(B) \neq 0$, alors : $\forall i \in I, P_B(A_i) = \frac{P_{A_i}(B)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P_{A_i}(B)P(A_i)}{\sum_{k \in I} P_{A_k}(B)P(A_k)}$.

Événements indépendants, deux à deux indépendants, mutuellement indépendants.

- A et B sont indépendants pour la probabilité P si : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
- $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont deux à deux indépendants si la probabilité de l'intersection de deux événements distincts parmi eux est égale au produit des deux probabilités correspondantes.
- $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants si la probabilité de l'intersection de n'importe quels événements distincts parmi eux est égale au produit des probabilités correspondantes.
- L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux. La réciproque est fausse.



VARIABLES ALÉATOIRES, VECTEURS ALÉATOIRES

On se place dans un espace probabilisé (Ω, P) .

Définition. Une *variable aléatoire* est une application $X : \Omega \rightarrow E$, où E est un ensemble. Elle est réelle si $E = \mathbb{R}$.

Support. Le *support* de X est l'ensemble de ses valeurs prises, noté $X(\Omega)$. Une variable aléatoire réelle est discrète si son support est fini ou dénombrable.

Loi. Donner la *loi* d'une variable réelle discrète X , c'est préciser son support, et pour chacune des valeurs x_k de $X(\Omega)$, préciser $P(X = x_k)$.

Fonction de répartition. La fonction de répartition de X est l'application $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ qui à tout réel x associe $P(X \leq x)$. F_X est croissante, de limite nulle en $-\infty$, de limite 1 en $+\infty$. Elle est continue en tout point, sauf aux points x tels que $P(X = x) \neq 0$, où elle est continue à droite.

Espérance.

- $E(X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k P(X = x_k)$. L'espérance est une moyenne pondérée.
- Si $X(\Omega) \subset [a, b]$, $a \leq E(X) \leq b$. Si $X(\Omega) \subset]a, b[$, $a < E(X) < b$. Si $E(X) = 0$, X est dite centrée.
- $E(aX + b) = aE(X) + b$. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Théorème de transfert. $E(f(X)) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} f(x_k) P(X = x_k)$.

Variance.

- $V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} (x_k - E(X))^2 P(X = x_k)$. La variance est une mesure de dispersion.
- $V(X) \geq 0$. Si $V(X) = 0$, X est (presque sûrement) constante. Si $V(X) = 1$, X est dite réduite.
- $V(aX + b) = a^2 V(X)$. $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$ (cf. infra).

Ecart-type.

- $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$.
- $\sigma_{aX+b} = |a| \sigma_X$.

Loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$; $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(X = k) = \frac{1}{n}$; $E(X) = \frac{n+1}{2}$; $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. $X(\Omega) = \{0, 1\}$; $P(X = 1) = p$; $P(X = 0) = 1 - p$; $E(X) = p$; $V(X) = p(1 - p)$.

Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$; $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$; $E(X) = np$; $V(X) = np(1 - p)$.

Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$; $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = q^{k-1} p$; $E(X) = \frac{1}{p}$; $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. $X(\Omega) = \mathbb{N}$; $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$; $E(X) = \lambda$; $V(X) = \lambda$.

Inégalité de MARKOV. Si X est à valeurs positives : $\forall \varepsilon > 0$, $P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}$.

Inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV. $\forall \varepsilon > 0$, $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$.

Covariance.

- **Définition.** $\text{cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$. Si $\text{cov}(X, Y) > 0$, X et Y sont positivement corrélées. Résultat analogue si $\text{cov}(X, Y) < 0$. Si $\text{cov}(X, Y) = 0$, X et Y ne sont pas corrélées.
- **Formule de KOENIG-HUYGENS.** $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
- **Propriétés.** $\text{cov}(X, X) = V(X)$. $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$. $\text{cov}(aX + b, cY + d) = ac \text{cov}(X, Y)$.
Si X et Y sont indépendantes, alors $\text{cov}(X, Y) = 0$. Réciproque fautive.

Coefficient de corrélation linéaire. $\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$. $|\rho_{X,Y}| \leq 1$. Si $|\rho_{X,Y}| = 1$, $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, $Y = aX + b$.

VARIABLES À DENSITÉ

Fonction de répartition. X est une variable aléatoire à densité si sa fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini ou dénombrable de points.

Densité. f est une densité de probabilité si f est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini ou dénombrable de points, et telle que : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaille 1.

Si F est la fonction de répartition de X , alors toute fonction f telle que $F' = f$ aux points où F est dérivable est une densité de X . Si f est une densité de X , alors la fonction de répartition de X est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ partout là où f est continue. Plus généralement, si f est continue à droite (resp. à gauche) en x , alors F est dérivable à droite (resp. à gauche) en x .

Loi uniforme $\mathcal{U}([a, b])$.

— **Support.** $X(\Omega) = [a, b]$.

— **Densité.** Une densité de X est la fonction f définie par : $f(t) = \frac{1}{b-a}$ si $t \in [a, b]$ et $f(t) = 0$ sinon.

— **Fonction de répartition.** La fonction de répartition de X est la fonction F définie par : $F(x) = 0$ si $x < a$, $F(x) = 1$ pour $x > b$ et : $\forall x \in [a, b], F(x) = \frac{x-a}{b-a}$.

— **Espérance, variance.** $E(X) = \frac{a+b}{2}$. $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

— **Support.** $X(\Omega) =]0, +\infty[$.

— **Densité.** Une densité de X est la fonction f définie par : $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ si $t > 0$ et 0 sinon.

— **Fonction de répartition.** La fonction de répartition de X est la fonction F définie par : $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ si $x > 0$ et 0 sinon.

— **Espérance, variance.** $E(X) = \frac{1}{\lambda}$. $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$.

— **Support.** $X(\Omega) = \mathbb{R}$

— **Densité.** Une densité de X est la fonction f définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$.

— **Espérance, variance.** $E(X) = m$. $V(X) = \sigma^2$.

Loi normale centrée-réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

— **Support.** $X(\Omega) = \mathbb{R}$

— **Densité.** Une densité de X est la fonction f définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$. $E(X) = 0$.

— **Fonction de répartition.** On note Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire X suivant une loi normale centrée-réduite. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

— **Espérance, variance.** $E(X) = 0$. $V(X) = 1$.

Propriétés de stabilité des lois classiques.

— Si $a < b$, X suit la loi $\mathcal{U}[0, 1] \Leftrightarrow a + (b-a)X$ suit la loi $\mathcal{U}[a, b]$.

— Si Y suit la loi $\mathcal{U}[0, 1]$, alors $X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-Y)$ suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

— Si $a \neq 0$, X suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2) \Leftrightarrow aX + b$ suit la loi $\mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$.

— Si X et Y suivent $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et $\mathcal{N}(m', \sigma'^2)$, alors $X + Y$ suit la loi $\mathcal{N}(m + m', \sigma^2 + \sigma'^2)$.

Théorème de transfert. Si X admet une densité f nulle en-dehors d'un intervalle $]a, b[$ ($(a, b) \in \mathbb{R}^2$), et si g est une fonction continue sauf peut-être en un nombre fini de points sur $]a, b[$, alors $g(X)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_a^b g(t)f(t) dt$ converge absolument, et on a alors : $E(g(X)) = \int_a^b g(t)f(t) dt$.

Moment d'ordre r . X admet un moment d'ordre r , noté $m_r(X)$ si et seulement si l'intégrale $\int_a^b t^r f(t) dt$ converge absolument, et on a alors : $E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t) dt$.



Optimal Sup-Spé 01 40 26 78 78 ■ 11, rue Geoffroy l'Angevin, 75004 Paris

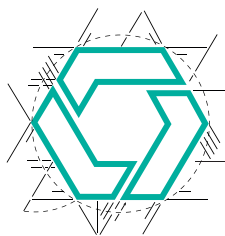
ÉTABLISSEMENT D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR PRIVÉ



<https://www.facebook.com/optimalsupspe/>



<https://twitter.com/ipesup>



Optimal Sup-Spé

Groupe Ipesup

Le n°1 en Sup-Spé

Notre ambition : l'excellence

Spécialisée

EN PRÉPA
SCIENTIFIQUE

EN MATH SUP -
MATH SPÉ

NOS FORMULES



Cours hebdomadaires



Stages intensifs



Sur place ou à distance

NOS PARTICULARITÉS



Petits groupes



Groupes de niveau



Polycopiés complets

Cours filmés sur tout le programme
sur notre  chaîne Youtube

Application mobile Optimal Sup Spé :
formulaires, vidéos...



optimalsupspe.fr

Optimal Sup-Spé 01 40 26 78 78 ■ 111, rue Geoffroy l'Angevin, 75004 Paris

ÉTABLISSEMENT D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR PRIVÉ



<https://www.facebook.com/optimalsupspe/>



<https://twitter.com/ipesup>