CHAPITRE 5

ESPACES VECTORIELS

MATHS SPÉ - CONCOURS SCIENTIFIQUES

Correction des exercices

Sommaire

Exercices classiques

Exercice 1 - Dimension infinie de $\mathbb{K}[X]$ ★

Supposons par l'absurde que $\mathbb{K}[X]$ soit un espace vectoriel de dimension finie. Notons alors $n \in \mathbb{N}$ sa dimension.

La famille $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille génératrice du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$. D'après le théorème de la base incomplète, on peut extraire de la famille génératrice $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base $\mathcal{B}$ de longueur n. Notons alors $m \in \mathbb{N}$ le degré maximal des polynômes de $\mathcal{B}$. Tout polynôme pouvant s'écrire comme combinaison linéaire des polynômes de $\mathcal{B}$, on a alors :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \deg(P) \leqslant m.$$

Ceci est absurde, X^{m+1} étant par exemple un polynôme de degré $m+1$. On peut désormais conclure :

$$\boxed{\mathbb{K}[X] \text{ est un espace vectoriel de dimension infinie}}$$

Rappel de cours

On se souviendra que : $\forall (P,Q) \in (\mathbb{K}[X])^2, \deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$.

Exercice 2 - Liberté des logarithmes de nombres premiers ★★

Idée : on va montrer que toute sous-famille finie de $(\ln(p_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est libre.

Soient $N \in \mathbb{N}$, et $p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{i_N}$, N nombres premiers distincts. Montrons que $(\ln(p_{ik}))_{k\in[\![1\,,\,N]\!]}$ est une famille libre dans $\mathbb{Q}$.

Supposons qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{Q}^N$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k ln(p_{i_k}) = 0.$$

Quitte à multiplier les deux membres de l'égalité par le ppcm des dénominateurs de $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, on peut supposer que $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{Z}^N$. Montrons alors que pour tout $k \in [\![1\,,\,N]\!]$, on a : $\lambda_k = 0$.

En utilisant successivement les propriétés du logarithme, on a :

$$\sum_{k=1}^{N} \ln(p_{i_k}^{\lambda_k}) = 0,$$

soit :

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{N} p_{i_k}^{\lambda_k}\right) = 0,$$

soit encore :

$$\prod_{k=1}^{N} p_{i_k}^{\lambda_k} = 1.$$

Quitte à réindexer la somme, on peut supposer qu'il existe $r \in [\![0\,,\,N]\!]$ tel que $\lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0, ..., \lambda_r \geqslant 0$ et $\lambda_{r+1} \leqslant 0, \lambda_{r+2} \leqslant 0, ..., \lambda_N \leqslant 0$. On peut alors réécrire l'égalité précédente comme suit :

$$\prod_{k=1}^{r} p_{i_k}^{\lambda_k} = \prod_{k=r+1}^{N} p_{i_k}^{-\lambda_k}.$$

Par unicité de la décomposition en facteurs premiers, les p_i étant distincts, il vient :

$$\forall k \in [\![1\,,\, N]\!], \lambda_k = 0.$$

La famille $(\ln(p_{i_1}), \ln(p_{i_2}), \dots, \ln(p_{i_N}))$ est donc libre.

$\boxed{(\ln(p_n))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est une famille libre dans le } \mathbb{Q}\text{-espace vectoriel } \mathbb{R}}$

Point méthode

Pour montrer qu'une famille infinie est libre, on montre que toute sous-famille de taille finie de celle-ci est libre.

Exercice 3 - Liberté d'une famille de fonctions ★★

Idée : on va montrer que toute famille finie de fonctions g_a est libre.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit alors $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, une famille finie de n éléments distincts issus de $\mathbb{R}$.
Supposons qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_{a_i} = 0.$$

Soit $k \in [\![1\,,\, n]\!]$. On peut réécrire l'égalité de la façon suivante :

$$\lambda_k g_{a_k} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \lambda_i g_{a_i}$$

Or, on sait que, $\forall a \in \mathbb{R}$ la fonction $g_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto |x-a|$ est continue, partout dérivable sauf au point a.

Ainsi : $\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \lambda_i g_{a_i}$ est dérivable au point a_k (les éléments de $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ étant distincts).
Il vient : $\lambda_k g_{a_k}$ est dérivable au point a_k.
Comme g_{a_k} n'est pas dérivable en a, cela force $\lambda_k = 0$.

Conclusion
On a : $\forall k \in [\![1\,,\, n]\!], \lambda_k = 0$.
Ainsi, $(g_{a_1}, g_{a_2}, \dots, g_{a_n})$ est une famille libre. Toute famille finie d'éléments de $(g_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est donc libre.

$\boxed{(g_a)_{a\in\mathbb{R}} \text{ est une famille libre du } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel des fonctions de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}}$

Exercice 4 - Supplémentaire commun ★★★

Remarquons tout d'abord que deux espaces identiques admettent trivialement un supplémentaire commun. Nous nous contentons donc de montrer la propriété pour deux espaces distincts.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels distincts de E.

1) Condition nécessaire

On va commencer par montrer que F et G admettent un supplémentaire commun, alors ils ont nécessairement la même dimension.
Supposons que F et G admettent un supplémentaire commun S.
Par définition des espaces supplémentaires, on a alors :

$$F \oplus S = G \oplus S = E.$$

Or, on sait que la somme des dimensions d'espaces de dimension finie en somme directe est égale à la dimension de l'espace totale. On a donc :

$$\dim(F) + \dim(S) = n, \qquad \text{et :} \qquad \dim(G) + \dim(S) = n.$$

Ainsi, en utilisant les deux égalités, il vient directement :

$$\dim(F) = \dim(G).$$

2) Condition suffisante

Idée : on va construire une famille de vecteur qui ne sont ni dans F, ni dans G, jusqu'à ce que tout l'espace soit rempli.

Supposons que $\dim(F) = \dim(G)$.
Montrons par récurrence descendante que pour tout $k \in [\![0\,, n]\!]$, la proposition $\mathscr{P}(k)$ définie par :

$\mathscr{P}(k)$: "Deux sous-espaces vectoriels distincts de même dimension k admettent un supplémentaire commun."

est vraie.

— Initialisation : Soient F_n et G_n deux sous-espaces vectoriels de E de dimension n. Alors : $F_n = G_n = E$ et l'ensemble vide est un supplémentaire commun à F_n et G_n. Ainsi, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

— Hérédité : Soit $k \in [\![0\,, n-1]\!]$. Supposons $\mathscr{P}(k+1)$ vraie et montrons que $\mathscr{P}(k)$ est vraie.
Soient F_k et G_k deux sous-espaces vectoriels distincts de E de dimension n.
Ainsi : $F_k \not\subset G_k$ et $G_k \not\subset F_k$, donc $F_k \cup G_k$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E. A fortiori, $F_k \cup G_k \neq E$.
Donc, il existe $x \in E \backslash (F_k \cup G_k)$ tel que les sommes $F_k + Vect(x)$ et $G_k + Vect(x)$ soient directes.
Alors, $F_k \oplus Vect(x)$ et $G_k \oplus Vect(x)$ sont deux espaces vectoriels de dimension $k+1$. Par hypothèse de récurrence, $F_k \oplus Vect(x)$ et $G_k \oplus Vect(x)$ admettent un supplémentaire commun qu'on notera S_{k+1}.
En définitive, $F_k \oplus (Vect(x) \oplus S) = E$ et $G_k \oplus (Vect(x) \oplus S) = E)$ et $Vect(x) \oplus S$ est un supplémentaire commun à F_k et G_k.

Ainsi, si $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(k)$ est vraie.

— Conclusion : Pour tout $k \in [\![0\,, n]\!]$, deux sous-espaces vectoriels distincts de même dimension k admettent un supplémentaire commun.

$\boxed{\text{Deux sous-espaces vectoriels de } E \text{ admettent un supplémentaire commun si et seulement si ils ont même dimension}}$

Exercices d'approfondissement

Exercice 5 - Lemme de DEDEKIND ◆◆

Idée : on va raisonner sur la définition d'une famille libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

Supposons $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_i = 0$.
Ainsi, pour tout $(a, b) \in G^2$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_i(a + kb) = 0.$$

En utilisant la définition des morphismes de groupes :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_i(a).\sigma_i(b)^k = 0.$$

Cela étant vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut effectuer une combinaison linéaire. Pour tout $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_i(a).\sigma_i(b)^k \right) = 0.$$

D'où par linéarité de la somme :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_i(a). \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sigma_i(b)^k \right) = 0.$$

Ainsi :

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_i(a).P(\sigma_i(b)) = 0.$$

En particulier, pour le polynôme $\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (X - \sigma_j(b))$, tous les termes de la somme s'annulent, excepté le i^{me}. En effectuant cette opération pour tout i, il vient :

$$\forall i \in [\![1 , n]\!], \lambda_i \sigma_i(a).\sigma_i(b) = 0.$$

Les morphismes étant à valeurs dans $\mathbb{K}^*$, $\sigma_i(a) \neq 0$ et $\sigma_i(b) \neq 0$:
Ainsi :

$$\forall i \in [\![1 , n]\!], \lambda_i = 0.$$

On peut conclure :

$$\boxed{\text{La famille } (\sigma_i)_{i \in [\![1 , n]\!]} \text{ est libre dans le } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel des fonctions de } G \text{ dans } \mathbb{K}^*}$$

Exercice 6 - Polynômes de HILBERT ◆◆

1) <u>Idée</u> : on reconnaîtra des coefficients binomiaux, d'abord pour tout $n \in \mathbb{N}$, avant d'élargir à tout $n \in \mathbb{Z}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$.
— **Cas 1 : sur les entiers naturels**
Par définition :

$$\forall n \in \mathbb{N}, H_k(n) = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (n - i).$$

$$\forall n \geqslant k, H_k(n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{et :} \qquad \forall n \in [\![0 , k-1]\!], H_k(n) = 0.$$

On reconnait alors le coefficient binomial $\binom{n}{k}$.
En définitive : $\forall n \in \mathbb{N}, H_k(n) \in \mathbb{Z}$.

— **Cas 2 : sur les entiers relatifs negatifs**

$$\forall n \in \mathbb{Z}^-, \exists l \in \mathbb{N}, n = -l.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
H_k(n) &= H_k(-l) \\
&= \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(-m-i) \\
&= \frac{(-1)^n}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(m+i) \\
&= (-1)^n\frac{(m+k-1)!}{k!(m-1)!} \\
&= (-1)^n\binom{m+k-1}{k} \\
H_k(n) &= (-1)^n\binom{k-n-1}{n}.
\end{aligned}$$

En définitive : $\forall n \in \mathbb{Z}^-, H_k(n) \in \mathbb{Z}$.

On peut finalement conclure, dans tous les cas :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, H_k(n) \in \mathbb{Z} \text{ donc : } H_k(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z} \text{ et } H_k \in \mathcal{E}}$$

2) Montrons que $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre et génératrice de $\mathbb{C}[X]$.

— **Liberté**
La famille est à degrés échelonnés. En effet : $\forall k \in \mathbb{N}, \deg(H_k) = k$.
Or toute famille de polynômes de degré distincts est libre.
Ainsi, $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre.

— **Génération**
Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{C}_n[X]$ est engendré par $(H_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$.
$(H_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une famille libre à k éléments de $\mathbb{C}_n[X]$. C'est donc une base de $\mathbb{C}_n[X]$. Par définition, c'est aussi une famille génératrice de $\mathbb{C}_n[X]$.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout polynôme de degré n peut être obtenu comme combinaison linéaire d'élements de $(H_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$.

En définitive, tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ peut s'écrire comme combinaison linéaire d'élements de $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Ainsi : $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}[X]$

— **Conclusion**

$$\boxed{(H_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ une base de } \mathbb{C}[X]}$$

Remarque

La base $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est appelée base de /textscHilbert de $\mathbb{C}[X]$.

3) Idée : On va montrer par double inclusion que $\mathcal{E}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des $\mathbb{H}_k$.

Notons Δ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des $\mathbb{H}_k$.

— Montrons que $\Delta \subset \mathcal{E}$
Soit $P \in \Delta$. Notons $n = \deg(P)$.
Ainsi : $\exists\,(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_i) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tel que $P = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i H_i$.

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z}, \lambda_i H_i(m) \in \mathbb{Z}.$$

donc $P \in \mathcal{E}$.

— Montrons que $\mathcal{E} \subset \Delta$
Soit $P \in \mathcal{E}$. Notons $n = \deg(P)$.
$(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant une base de $\mathbb{C}[X]$, il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_i) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $P = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i H_i$.
Nous allons montrer par récurrence forte que $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_i) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

— Montrons par récurrence forte que pour tout $i \in [\![0\,, n]\!]$, la proposition $\mathscr{P}(i)$ définie par :

$$\mathscr{P}(i) : \quad "\lambda_i \in \mathbb{Z}"$$

est vraie.

— Initialisation : Par hypothèse, on a : $P(0) \in \mathbb{Z}$. Or $P(0) = \lambda_0$, donc $\lambda_0 \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

— Hérédité : Soit $i \in [\![1\,, n]\!]$. Supposons $\mathscr{P}(i-1)$ vraie et montrons que $\mathscr{P}(i)$ est vraie.
On a :

$$P(i) = \sum_{k=0}^{i} \lambda_k H_k(i)$$

$$P(i) = \lambda_i H_i(i) + \sum_{k=0}^{i-1} \lambda_k H_k(i).$$

Or, $H_i(i) = 1$. On a donc :

$$\lambda_i = P(i) - \sum_{k=0}^{i-1} \lambda_k H_k(i).$$

Par hypothèse de récurrence, $\sum\limits_{k=0}^{i-1} \lambda_k H_k(i) \in \mathbb{Z}$.
En définitive, $\lambda_i \in \mathbb{Z}$.
Ainsi, si $\mathscr{P}(i-1)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(i)$ est vraie.

— Conclusion : Pour tout $i \in [\![0\,, n]\!]$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ et ainsi : $P \in \Delta$.

Ainsi, par double inclusion, on a :

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans } \mathbb{Z} \text{ des } H_k}$$

Exercice 7 - Espace vectoriel sur un corps fini (MP) ◆◆◆

1) E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
E est donc isomorphe à K^n, ce qui signifie qu'il existe une bijection entre E et K^n. Ces deux ensembles ont donc même cardinal :

$$\begin{aligned} Card(E) &= Card(K^n) \\ &= Card(K)^n \\ Card(E) &= q^n. \end{aligned}$$

Conclusion

$$\boxed{Card(E) = q^n}$$

Rappel de cours

Deux espaces vectoriels sur un même corps, de même dimension finie, sont isomorphes.

2) Nous allons dénombrer le nombre de r-uplets $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ de E^r formant une famille libre.

— Montrons par récurrence que pour tout $s \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}(s)$ définie par :

$$\mathscr{P}(s) : \quad \text{"Le nombre de familles } (e_1, e_2, \dots, e_s) \text{ libres est : } \prod_{i=0}^{s-1}(q^n - q^i)$$

est vraie.

— Initialisation : Toute famille composée d'un unique élement de E est libre si et seulement si cet élément est non nul. On a donc $q^n - 1$ 1-uplets de E^1 formant une famille libre. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

— Hérédite :
Soit $s \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(s)$ vraie et montrons que $\mathscr{P}(s+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait qu'il existe $\prod_{i=0}^{s-1}(q^n - q^i)$ s-upplets de E^s formant une famille libre.
Soit $(e_1, e_2, \dots, e_{s+1}) \in E^{s+1}$. Cette famille est libre si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies :

(a) $(e_1, e_2, \dots, e_s)$ est une famille libre

(b) $e_{s+1} \notin Vect((e_1, e_2, \dots, e_s))$.

Par hypothèse de récurrence, on dénombre $\prod_{i=0}^{s-1}(q^n - q^i)$ famille libre de taille s.
De plus, $(e_1, e_2, \dots, e_s)$ étant une famille libre, $Vect((e_1, e_2, \dots, e_s))$ est isomorphe à K^s donc comporte s^s élements.
En définitive, le nombre de familles de $(s+1)$-uplets de E^{s+1} formant une famille libre est égal à :

$$\left(\prod_{i=0}^{s-1}(q^n - q^i)\right)(q^n - q^s) = \prod_{i=0}^{s}(q^n - q^i).$$

Ainsi, si $\mathscr{P}(s)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(s+1)$ est vraie.

— Conclusion : Pour tout $s \in \mathbb{N}$, le nombre de familles $(e_1, e_2, \dots, e_s)$ libres est : $\prod_{i=0}^{s-1}(q^n - q^i)$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Le nombre de } r\text{-uplets } (e_1, e_2, \dots, e_r) \text{ de } E^r \text{ formant une famille libre est égal à } \prod_{i=0}^{r-1}(q^n - q^i)}$$

3) E étant un espace vectoriel de dimension n, une famille libre d'éléments de E de taille n est une base de E. Ainsi, dénombrer le nombre de base de E revient à dénombrer le nombre de n-uplets $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E^n formant une famille libre.

D'après la question précédente, il y a $\prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i)$ n-uplets $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E^n formant une famille libre.

$$\boxed{\text{On dénombre } \prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i) \text{ base de } E}$$

4) Soit $r \in [\![1, n]\!]$. Notons alors N_r le nombre de sous-espaces vectoriels de dimension r de E.
Le nombre de famille libre de taille r de E peut être obtenu de la manière suivante :
— on choisit un sous-espace vectoriel de taille r : N_r possibilités
— on dénombre toutes les bases de cet espace vectoriel : $\prod_{i=0}^{r-1}(q^r - q^i)$.
En définitive, en dénombrant cette quantité de deux manières différentes, on a donc :

$$\prod_{i=0}^{r-1}(q^n - q^i) = N_r \prod_{i=0}^{r-1}(q^r - q^i).$$

Ainsi :

$$N_r = \frac{\prod_{i=0}^{r-1}(q^n - q^i)}{\prod_{i=0}^{r-1}(q^r - q^i)}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } r \in [\![1, n]\!], \text{ le nombre de sous-espace vectoriel de } E \text{ de dimension } r \text{ est égal à } \frac{\prod_{i=0}^{r-1}(q^n - q^i)}{\prod_{i=0}^{r-1}(q^r - q^i)}}$$