Chapitre 16. Formules de Taylor. Développements limités

Aides à la résolution et correction des exercices

Maths SUP - Filière MPSI

OPTIMAL *SUP-SPE* **- Concours 2016**

Enoncé des exercices et indices de difficulté

☆ Exercice de base, à maîtriser parfaitement (★ s'il s'agit d'un exercice classique),
☆☆ Exercice d'approfondissement (★★ s'il s'agit d'un exercice classique),
① Exercice sans grande difficulté,
② Exercice de difficulté moyenne,
③ Exercice assez délicat, comportant des questions difficiles.
④ Exercice très difficile, s'adressant aux meilleurs candidats.

★ 1. Opérations sur les développements limités ①

1) ***Somme.*** Déterminer le d.l. au voisinage de 0, à l'ordre 3 de :

a) $x \mapsto e^x + \cos x$,

b) $x \mapsto \ln(1+x) + \sin x$.

2) ***Produit.*** Déterminer le d.l. au voisinage de 0, à l'ordre 4 de :

a) $x \mapsto \cos x \cdot \sin x$,

b) $x \mapsto e^x \ln(1+x)$.

3) ***Composition.*** Déterminer le d.l. au voisinage de 0, à l'ordre 4 de :

a) $x \mapsto \ln(\cos x)$,

b) $x \mapsto e^{\sin x}$.

4) ***Quotient.*** Déterminer le d.l. au voisinage de 0 de :

a) $x \mapsto \tan x$ (à l'ordre 5),

b) $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\ln(1+x)}$ (à l'ordre 4).

5) ***Changement de variable.*** Déterminer le d.l. à l'ordre 2 de :

a) $x \mapsto e^x$ (au voisinage de 2),

b) $x \mapsto \cos x$ (au voisinage de $\frac{\pi}{4}$),

c) $x \mapsto \ln x$ (au voisinage de 2).

6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Ecrire le développement limité à l'ordre 3 de la fonction $x \mapsto e^x - 1$ au voisinage de 0. En déduire les trois nombres réels a_n, b_n et c_n tels que, quand x est au voisinage de 0 :

$$(e^x - 1)^n = a_n x^n + b_n x^{n+1} + c_n x^{n+2} + o(x^{n+2}).$$

★★ 2. Applications des développements limités ②

1) **a)** Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

b) Déterminer un équivalent en 0 de $\sin x - x$.

2) **a)** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(0) = \dfrac{1}{6} \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \dfrac{x - \sin x}{x^3} \end{cases}.$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

b) Soit g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(1) = 3 \\ \forall x \in]1, +\infty[, g(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)}{x \ln x} \end{cases}.$$

On admet que g est continue sur $[1, +\infty[$. Montrer que g est dérivable sur $[1, +\infty[$ et donner $g'(1)$.

c) Soit h la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], h(x) = \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} \end{cases}.$$

Montrer que h est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et donner $h'(0)$.

d) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{\sin x}{x} \end{cases}.$$

Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+$ (on précisera les valeurs de $f'(0)$ et de $f''(0)$).

3) Déterminer, à l'aide de la formule de Taylor-Young, un développement limité à l'ordre 3 de $\tan x$ au voisinage de 0.

4) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$.

a) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de 0^+.

b) On suppose que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+$. Déterminer la valeur de $f(0)$, $f'(0)$ et $f''(0)$.

5) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x^2}$. Déterminer un équivalent de f lorsque x tend vers $+\infty$.

★ 3. Inégalités fonctionnelles ①

1) Montrer, à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

2) Montrer, à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

3) Montrer, à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

☆☆ 4. Formule de Taylor-Lagrange ②

Soient n un entier naturel non nul, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a, b) \in I^2$, $a < b$, et f une fonction de classe C^{n+1} sur I. Montrer que :

$$\exists c \in]a, b[, f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

On pourra considérer la fonction φ définie sur $[a, b]$ par : $\forall x \in [a, b]$, $\varphi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A$, où A est le réel tel que $\varphi(a) = 0$, i.e. : $A = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \left[f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right]$.

☆ ☆ 5. Propriétés des fonctions convexes ②

Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

1) Soient $x \in \mathbb{R}$ et g_x la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\forall h \in \mathbb{R}^*, \; g_x(h) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

Déterminer la limite de g_x quand h tend vers 0.

2) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f''(x) \geq 0.$$

★ 6. Meilleure majoration ②

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \; f(x) = \frac{x}{2(1+x)} + \frac{x}{2} - \ln(1+x).$$

1) a) Prouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \; 0 \leq f(x) \leq \frac{x^3}{6},$$

b) Montrer que, quand x est au voisinage de 0 :

$$f(x) = \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

2) Déterminer alors le plus petit nombre réel k tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \; 0 \leq f(x) \leq kx^3.$$

☆ ☆ 7. Développement limité et extremum ③

1) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ dont l'intérieur contient 0, n un entier naturel non nul, α et β deux nombres réels ($\beta \neq 0$) et f une fonction définie sur I telle que son développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 soit :

$$f(x) = \alpha + \beta x^n + x^n \varepsilon(x) \quad \text{avec} \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Montrer que si n est pair, f possède un extremum local en 0 (on précisera, en fonction du signe de β, si cet extremum est un minimum ou un maximum) et que si n est impair, f ne possède pas d'extremum local en 0.

2) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ dont l'intérieur contient 0, α, β et γ trois nombres réels ($\gamma \neq 0$) et g une fonction définie sur I telle que son développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 soit :

$$g(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + x^2 \varepsilon(x) \quad \text{avec} \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Montrer que la courbe représentative de g admet une tangente en (0, g(0)) dont on précisera l'équation. Montrer alors que la courbe représentative de g est située "au-dessus" (resp. "en dessous") de cette tangente au voisinage de 0 si $\gamma > 0$ (resp. si $\gamma < 0$).

★ 8. Théorème de division ③

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$, I^- l'ensemble des valeurs strictement négatives de I, I^+ l'ensemble des valeurs strictement positives de I, $n \in \mathbb{N}^*$, f une fonction de classe C^{n+1} sur I telle que f(0) = 0 et g la fonction définie sur I par :

$$\begin{cases} \forall x \in I \setminus \{0\}, \; g(x) = \dfrac{f(x)}{x} \\ g(0) = f'(0) \end{cases}.$$

1) a) Montrer que g est continue sur I.

b) Montrer que g est dérivable sur I.

2) Montrer que g est de classe C^n sur I^- et I^+. Déterminer alors une expression de $g^{(n)}$ sur $I\setminus\{0\}$.

3) A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer alors que :

$$\forall x\in I\setminus\{0\},\ g^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x t^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

4) En déduire à l'aide d'un encadrement de $g^{(n)}(x)$ au voisinage de 0 que g est de classe C^n sur I et que :

$$g^{(n)}(0) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}.$$

__Application__ : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x\in \mathbb{R}^*,\ g(x) = \dfrac{\sin x}{x} \\ g(0) = 1 \end{cases}.$$

Montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

★ 9. Inégalités fonctionnelles (2) ②

1) Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$. On note : $M_0 = \sup\limits_{\mathbb{R}} |f|$, $M_2 = \sup\limits_{\mathbb{R}} |f''|$.

a) Montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall h\in\mathbb{R},\ \left|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\right| \le \frac{M_2 h^2}{2}.$$

b) En posant $h = t$, puis $h = -t$ ($t\in\mathbb{R}_+^*$), montrer que :

$$\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \left|f'(x)\right| \le \frac{M_2 t}{2} + \frac{M_0}{t}.$$

En déduire que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et donner un majorant de sa borne supérieure M_1.

2) Soient f une fonction positive de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et M un réel positif tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \left|f''(x)\right| \le M.$$

a) Prouver que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall h\in\mathbb{R},\ f(x) + f'(x)h + \frac{M}{2}h^2 \ge f(x+h).$$

b) En déduire que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \left|f'(x)\right| \le \sqrt{2Mf(x)}.$$

☆☆ 10. Division de polynômes ②

Pour tout entier naturel p non nul, on considère les polynômes E_p et L_p définis par :

$$\begin{cases} E_p = \displaystyle\sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{n!} X^n \\ L_p = \displaystyle\sum_{n=1}^{p-1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} X^n \end{cases}.$$

1) Montrer que l'on peut déterminer un développement limité de la fonction $x \mapsto e^{\ln(x+1)}$ au voisinage de 0 à l'ordre $p-1$ en fonction de E_p et de L_p.

2) En déduire qu'il existe une fonction ε de limite nulle en 0 telle que, lorsque x est au voisinage de 0 :

$$x+1 = T_p(x) + x^{p-1}\varepsilon(x),$$

où T_p est la partie tronquée à l'ordre p - 1 de $E_p(L_p(X))$.

3) Montrer que l'on a alors :

$$T_p(X) = X + 1,$$

puis montrer qu'il existe un polynôme Q_p (que l'on n'explicitera pas) tel que :

$$E_p(L_p(X)) = X + 1 + X^p Q_p(X).$$

☆ ☆ 11. Etude d'une fonction ②

1) a) On suppose, dans cette question, qu'il existe une fonction f de classe C^1 sur les intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $]0, 1[$, vérifiant pour tout réel x appartenant à l'un de ces deux intervalles :

$$x(1-x)f'(x) + (1-x)f(x) = 1.$$

On considère la fonction $h : x \mapsto x f(x)$, définie sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $]0, 1[$. Montrer que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_-^*$ et $]0, 1[$ et calculer sa dérivée. En déduire qu'il existe deux constantes c_1 et c_2 vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_-^*, h(x) = -\ln(1-x) + c_1 \\ \forall x \in]0, 1[, h(x) = -\ln(1-x) + c_2 \end{cases}.$$

b) On considère deux réels c_1 et c_2 et l'on définit une fonction f sur les intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $]0, 1[$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_-^*, f(x) = \dfrac{-\ln(1-x) + c_1}{x} \\ \forall x \in]0, 1[, f(x) = \dfrac{-\ln(1-x) + c_2}{x} \end{cases}.$$

Déterminer les valeurs respectives des réels c_1 et c_2 pour que la fonction f soit prolongeable par continuité en 0.

Dans la suite de l'exercice, on note toujours f la fonction ainsi prolongée.

2) a) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ puis le développement limité en 0 à l'ordre 2 de f.

b) En déduire que f est dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.

c) Prouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^* \cup]0, 1[, f'(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-x} - f(x)\right).$$

En déduire que f est de classe C^1 sur $]-\infty, 1[$.

3) a) Etudier le signe de la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{x}{1-x} + \ln(1-x)$ sur $]-\infty, 1[$. En déduire les variations de f.

b) Donner le tableau de variations de f et l'allure de sa courbe représentative en précisant les asymptotes, la tangente au point d'abscisse 0 ainsi que la position de la courbe de f par rapport à cette tangente.

Chapitre 16. Formules de Taylor. Développements limités

Aides à la résolution et correction des exercices

Maths SUP - Filière MPSI

OPTIMAL *SUP-SPE* **- Concours 2016**

Exercices corrigés

☆ Exercice de base, à maîtriser parfaitement (★ s'il s'agit d'un exercice classique),

☆☆ Exercice d'approfondissement (★★ s'il s'agit d'un exercice classique),

① Exercice sans grande difficulté,

② Exercice de difficulté moyenne,

③ Exercice assez délicat, comportant des questions difficiles.

④ Exercice très difficile, s'adressant aux meilleurs candidats.

Chapitre 16. Formules de Taylor. Développements limités

Aides à la résolution

Maths SUP - Filière MPSI

OPTIMAL *SUP-SPE* **- Concours 2016**

★ 1. Opérations sur les développements limités ①

6) Utiliser la formule du binôme de Newton.

★★ 2. Applications des développements limités ②

1) **a)** Déterminer un dl d'exponentielle au voisinage de 0 à l'ordre 2.

b) Déterminer un dl de sin au voisinage de 0 à l'ordre 2.

2) **b)** Considérer le taux d'accroissement de g en 1 et en déterminer un dl à l'ordre 2.

4) **b)** Utiliser la formule de Taylor-Young.

5) Faire un développement limité de $\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

★★ 2. Applications des développements limités ②

2) Faire un développement limité de $\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

★ 3. Inégalités fonctionnelles ①

Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.

☆☆ 4. Formule de Taylor-Lagrange ②

Considérer $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ et utiliser le théorème de Rolle.

★★ 5. Développements en séries entières ②

1) **a)** Considérer la fonction exponentielle entre 0 et -x.

b) Utiliser le théorème de l'encadrement.

3) **a)** Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.

4) **a)** Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

5) **a)** Pour déterminer les dérivées successives de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, procéder par récurrence.

☆ ☆ 6. Propriétés des fonctions convexes ②

1) Appliquer deux fois la formule de Taylor-Young à f, la première entre x et x + h, la seconde entre x et x - h.

2) Utiliser les inégalités de convexité aux points d'abscisses respectives x + h et x - h.

★ 7. Meilleure majoration ②

1) a) Etudier les variations de la fonction f.

2) Supposer l'existence d'un réel k strictement inférieur à $\frac{1}{6}$ satisfaisant puis prouver qu'il y a contradiction en utilisant le dl de f au voisinage de 0 et la définition de la limite.

☆ ☆ 8. Développement limité et extremum ③

1) Utiliser la définition de la limite pour la fonction ε.

2) Utiliser le résultat de la question précédente pour une fonction f judicieusement choisie.

★ 9. Théorème de division ③

1) a) Utiliser la définition de la dérivabilité de f en 0.

2) Utiliser la formule de Leibniz.

3) Appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale à f entre x et 0 puis utiliser le résultat de la question 2.

4) Utiliser le théorème de prolongement des fonctions de classe C^p.

★ 10. Inégalités fonctionnelles (2) ②

1) a) Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

b) Suivre les indications puis sommer les inégalités obtenues (de préférence sans valeur absolue, pour éviter les erreurs). Pour la majoration de M_1, procéder à une étude de fonction.

2) a) Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.

b) Considérer le signe d'un trinôme en h.

☆ ☆ 11. Division de polynômes ②

3) Utiliser l'unicité d'un déloppement limité.

☆ ☆ 12. Etude d'une fonction ②

☆ ☆ 13. Formule de Taylor et séries ②

1) Appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$.

2) Majorer la fonction sous l'intégrale définissant R_p.

3) Utiliser les résultats précédents.

Chapitre 16. Formules de Taylor. Développements limités

Correction des exercices

Maths SUP - Filière MPSI

OPTIMAL *SUP-SPE* **- Concours 2016**

★ 1. Opérations sur les développements limités ①

1) a) Au voisinage de 0, on a :

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$), et :

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_2(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$), d'où :

$$\boxed{e^x + \cos x = 2 + x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_3(x) \text{ (avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0)}$$

☞ Il y a deux façons d'écrire le terme complémentaire d'un développement limité : $o(x^n)$ ou $x^n\varepsilon(x)$, cette dernière, plus simple, permet d'éviter des écritures utilisant des résultats sur "l'algèbre des petits o" (hors-programme) : par exemple $o(x) \times o(x) = o(x^2)$ ou encore $o(x) - o(x) = o(x)$.
Par ailleurs, la notation o peut faire oublier la localisation des résultats considérés : par exemple une fonction peut en effet être négligeable devant x^p en 0 sans être négligeable devant x^p en 2.

b) Au voisinage de 0, on a :

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_1(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$), et :

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_2(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$), d'où :

$$\boxed{\ln(1+x) + \sin x = 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_3(x) \text{ (avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0)}$$

☞ Lorsque l'on cherche le d.l. d'une somme à l'ordre p, on effectue en général la somme des différents d.l. à l'ordre p.

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon_1(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$), et :

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon_2(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$), d'où :

$\cos x \cdot \sin x = x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon_3(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$), et donc :

$$\boxed{\cos x \cdot \sin x = x - \frac{2x^3}{3} + x^4\varepsilon_3(x) \text{ (avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0)}$$

N.B. : on pouvait également remarquer que : $\forall x\in \mathbb{R}$, $\cos x \cdot \sin x = \frac{1}{2}\sin(2x)$ et utiliser le développement limité de sin au voisinage de 0.

☞ L'ordre d'un d.l. est donné par la puissance de x dans son terme complémentaire (même si la partie régulière du d.l. ne contient pas d'élément de cet ordre). Par exemple, le d.l. à l'ordre 4 de sin au voisinage de 0 est : $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$).

b) Au voisinage de 0, on a :

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\varepsilon_1(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$), et :

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_2(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$), d'où :

$e^x\ln(1+x) = x + \left(x^2 - \frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + \left(\frac{x^4}{6} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{4}\right) + x^4\varepsilon_3(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$), et donc :

$$\boxed{e^x\ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^4\varepsilon_3(x) \quad (\text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0)}$$

☞ Lorsque l'on cherche le d.l. d'un produit à l'ordre p, on effectue en général le produit des différents d.l. à l'ordre p en tronquant les termes dont le degré est strictement supérieur à p (cf. 2a).
Cependant, lorsque l'on cherche le d.l. d'un produit fg à l'ordre p et que la valuation (c'est-à-dire le degré du terme de plus bas degré) du d.l. de f est k, il suffit d'effectuer le produit du d.l. à l'ordre p de f par le d.l. à l'ordre p - k de g (cf. question 2b).

3) **a)** Au voisinage de 0, on a :

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon_1(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$), et :

$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + u^4\varepsilon_2(u)$ (avec $\lim\limits_{u\to 0} \varepsilon_2(u) = 0$), d'où, en posant $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon_1(x)$

(u tend vers 0 lorsque x tend vers 0) :

$\ln(\cos x) = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + x^4\varepsilon_3(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$), et donc :

$$\boxed{\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + x^4\varepsilon_3(x) \quad (\text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0)}$$

b) Au voisinage de 0, on a :

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon_1(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$), et :

$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + u^4\varepsilon_2(u)$ (avec $\lim\limits_{u\to 0} \varepsilon_2(u) = 0$), d'où, en posant $u = x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon_1(x)$

(u tend vers 0 lorsque x tend vers 0) :

$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{2x^4}{6}\right) + \frac{1}{6}(x^3) + \frac{1}{24}(x^4) + x^4\varepsilon_3(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$), et donc :

$$\boxed{e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4\varepsilon_3(x) \quad (\text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0)}$$

☞ Lorsque l'on cherche le d.l. d'une composée de fonctions $f \circ g$ à l'ordre p au voisinage de 0, on procède en général comme suit :
- on détermine un d.l. à l'ordre p au voisinage de 0 de g,
- on pose $u = g(x) - g(0)$ (u est donc de nouveau au voisinage de 0 quand x est au voisinage de 0),
- on déterminer un d.l. à l'ordre p de la fonction $u \mapsto f(g(0) + u)$.

A l'aide du d.l. de g, par substitution dans le d.l. de $u \mapsto f(g(0) + u)$ et en tronquant les monômes de degrés strictement supérieurs à p, on obtient ainsi le résultat recherché.

4) a) Au voisinage de 0, on a :

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\varepsilon_1(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$), et :

$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - u^5 + u^5\varepsilon_2(u)$ (avec $\lim\limits_{u\to 0} \varepsilon_2(u) = 0$), d'où, en posant $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\varepsilon_1(x)$

(u tend vers 0 lorsque x tend vers 0) :

$\frac{1}{\cos x} = 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \frac{x^4}{4} + x^5\varepsilon_3(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$), soit :

$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + x^5\varepsilon_3(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$).

De plus, toujours au voisinage de 0, on a :

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon_4(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_4(x) = 0$), soit enfin, en multipliant ces deux dernières expressions :

$$\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon_5(x) \text{ (avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_5(x) = 0)}$$

☞ On pouvait également appliquer la formule de Taylor-Young ; ou bien utiliser l'imparité de la fonction tan pour conclure à l'imparité des termes de son développement limité en 0, puis utiliser la formule $\tan' = 1 + \tan^2$ et procéder par identification en utilisant l'unicité du développement limité (après dérivation dûment justifiée). Enfin, on pouvait aussi partir de l'équivalent usuel $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$, interpréter ce dernier comme un d.l.1 puis procéder par intégrations successives, en utilisant la formule $\tan' = 1 + \tan^2$, pour obtenir un d.l. d'ordre 5 de tan en 0.

b) Au voisinage de 0, on a :

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + x^5\varepsilon_1(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$), soit :

$= x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + x^4\varepsilon_1(x)\right)$, et :

$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + u^4\varepsilon_2(u)$ (avec $\lim\limits_{u\to 0} \varepsilon_2(u) = 0$), d'où, en posant $u = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + x^4\varepsilon_1(x)$

(u tend vers 0 lorsque x tend vers 0) :

$\frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{1}{x}\left[1 - \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5}\right) + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{9} + \frac{x^4}{4}\right) - \left(-\frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{4}\right) + \frac{x^4}{16} + x^4\varepsilon_3(x)\right]$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$),

soit :

$= \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{24} - \frac{19x^4}{720} + x^4\varepsilon_3(x)\right)$.

De plus, toujours au voisinage de 0, on a :

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon_4(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_4(x) = 0$), soit :

$= x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + x^4\varepsilon_4(x)\right)$, et donc, en multipliant ces deux dernières expressions :

$$\frac{\sin x}{\ln(1+x)} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{x^2}{12} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{72} - \frac{19x^4}{720} + x^4\varepsilon_5(x) \text{ (avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_5(x) = 0\text{), i.e. :}$$

$$\boxed{\frac{\sin x}{\ln(1+x)} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{240} + x^4\varepsilon_5(x) \text{ (avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_5(x) = 0)}$$

☞ Lorsque l'on cherche le d.l. d'un quotient $\frac{f}{g}$ à l'ordre p :

– on calcule tout d'abord le d.l. de g que l'on met sous la forme $1 + u$ où u est au voisinage de 0 (ou $x^k(1+u)$) à l'ordre p (resp. p + k),

– à l'aide du d.l. de $\frac{1}{1+u}$ à l'ordre p où u est au voisinage de 0, on en déduit le d.l. de $\frac{1}{g(x)}$ qui sera de la forme $1 + v$ (resp. $\frac{1}{x^k}(1+v)$),

– on multiplie enfin cette dernière expression par le d.l. de f à l'ordre p (resp. p + k) afin d'obtenir le résultat recherché.

Attention !!! On ne divise pas deux d.l. entre eux : cela pourrait s'avérer périlleux...

5) a) En posant $u = x - 2$ (u tend vers 0 lorsque x tend vers 2), on peut écrire : $e^x = e^{2+u} = e^2 e^u$. Or, au voisinage de 0, on a :
$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon_1(u)$ (avec $\lim_{u\to 0} \varepsilon_1(u) = 0$). On en déduit alors, au voisinage de 2 :

$$\boxed{e^x = e^2\left(1 + (x-2) + \frac{(x-2)^2}{2} + (x-2)^2\varepsilon_2(x)\right) \text{ (avec } \lim_{x\to 2} \varepsilon_2(x) = 0)}$$

b) En posant $u = x - \frac{\pi}{4}$ (u tend vers 0 lorsque x tend vers $\frac{\pi}{4}$), comme $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on peut écrire :
$\cos x = \cos\left(u + \frac{\pi}{4}\right) = \cos u \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \sin u \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos u - \sin u)$. Or, au voisinage de 0, on a :

$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon_1(u)$ (avec $\lim_{u\to 0} \varepsilon_1(u) = 0$), et :

$\sin u = u + u^2\varepsilon_2(u)$ (avec $\lim_{u\to 0} \varepsilon_2(u) = 0$), d'où :

$\cos u - \sin u = 1 - u - \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon_3(u)$ (avec $\lim_{u\to 0} \varepsilon_3(u) = 0$).

On en déduit alors, au voisinage de $\frac{\pi}{4}$:

$$\boxed{\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 - \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2}\right] + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\varepsilon_4(x) \text{ (avec } \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \varepsilon_4(x) = 0)}$$

c) En posant $u = x - 2$ (u tend vers 0 lorsque x tend vers 2), on peut écrire :

$$\ln x = \ln(u+2) = \ln\left[2\left(1 + \frac{u}{2}\right)\right] = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{u}{2}\right).$$

Or, au voisinage de 0, on a :

$\ln(1+v) = v - \frac{v^2}{2} + v^2\varepsilon_1(v)$ (avec $\lim_{v\to 0} \varepsilon_1(v) = 0$), soit en posant $v = \frac{u}{2}$, au voisinage de 0 :

$\ln\left(1 + \frac{u}{2}\right) = \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + u^2\varepsilon_2(u)$ (avec $\lim_{u\to 0} \varepsilon_2(u) = 0$).

On en déduit alors, au voisinage de 2 :

$$\boxed{\ln x = \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + (x-2)^2\varepsilon_3(x) \quad (\text{avec } \lim_{x\to 2}\varepsilon_3(x) = 0)}$$

☞ Lorsque l'on cherche un d.l. à l'ordre p à un voisinage de x_0 inhabituel ($x_0 \in \mathbb{R}^*$), on pose $u = x - x_0$ et on écrit alors, suivant les cas de figure :

- $e^x = e^{u+x_0} = e^{x_0}e^u$, et on calcule alors le d.l. de e^u à l'ordre p au voisinage de 0,
- $\cos x = \cos(u + x_0) = \cos u \cos x_0 - \sin u \sin x_0$, et on calcule alors les d.l. de $\sin u$ et $\cos u$ à l'ordre p au voisinage de 0 (on applique naturellement la même méthode pour déterminer un d.l. de $\sin x$ au voisinage de x_0),
- $\ln x = \ln(u + x_0) = \ln x_0 + \ln\left(1 + \frac{u}{x_0}\right)$ (avec $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$) et on calcule alors le d.l. de $\ln\left(1+\frac{u}{x_0}\right)$ à l'ordre p au voisinage de 0.

6) ▪ D'après le cours, on peut écrire qu'il existe une fonction ε_1 de limite nulle en 0 telle que, lorsque x est au voisinage de 0 :

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)$.

On peut donc conclure :

Il existe une fonction ε_1 de limite nulle en 0 telle que, lorsque x est au voisinage de 0 :
$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x).$$

▪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le développement limité de $f_n : x \mapsto (e^x - 1)^n$ au voisinage de 0 à l'ordre n + 2 est obtenu en élevant à la puissance n le développement limité à l'ordre n + 2 de la fonction $x \mapsto e^x - 1$ et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n + 2.

Cependant, les termes de degré inférieur ou égal à n + 2 ne peuvent être issus que du produit de n termes de degré inférieur ou égal à 3 (en effet, le produit de n - 1 termes de degré 1 par un terme de degré 4 donne un terme de degré n + 3), et l'on peut donc se contenter d'élever à la puissance n le développement limité à l'ordre 3 déterminé précédemment.

De plus, le terme de plus bas degré du développement limité au voisinage de 0 à l'ordre n + 2 de f_n étant x^n, il existe donc trois réels a_n, b_n et c_n et une fonction ε de limite nulle en 0 tels que, au voisinage de 0 :

$f_n(x) = a_nx^n + b_nx^{n+1} + c_nx^{n+2} + x^{n+2}\varepsilon(x)$.

Enfin, pour tout réel x, on a :

$$\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)^n = x^n\left(1 + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)\right)^n$$ et pour $u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}$ et d'après la formule du binôme de Newton :

$$= x^n \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^k.$$

Le développement limité de f_n au voisinage de 0 à l'ordre n + 2 comporte exclusivement des termes de degré inférieur ou égal à n + 2. Or, comme u comporte des termes de degré 1 et 2, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, u^k comporte des termes de degré supérieur ou égal à k. on peut alors écrire, quand x est au voisinage de 0 :

$$f_n(x) = x^n\left(1 + nu + \frac{n(n-1)}{2}u^2\right) + o(x^{n+2})$$ et comme

$$= x^n\left(1 + n\frac{x}{2} + n\frac{x^2}{6} + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^2\right) + o(x^{n+2})$$ et comme $x^n\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^2 = \frac{x^2}{4} + o(x^{n+2})$

$$= x^n + n\frac{x^{n+1}}{2} + n\frac{x^{n+2}}{6} + \frac{n(n-1)x^{n+2}}{8} + o(x^{n+2})$$ soit :

$f_n(x) = x^n + \frac{n}{2}x^{n+1} + \frac{n(3n+1)}{24}x^{n+2} + x^{n+2}\varepsilon(x)$ d'où :

$$\boxed{a_n = 1,\ b_n = \frac{n}{2} \text{ et } c_n = \frac{n(3n+1)}{24}}$$

★★ 2. Applications des développements limités ②

1) a) Au voisinage de 0, on a :

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ (avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$), soit :

$e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ (avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$), d'où :

$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} + \varepsilon(x)$ (avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$), et donc, par passage à la limite :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

☞ Se souvenir que la limite d'une fonction en un point x_0 est égale au coefficient du monôme de degré 0 de son d.l. (s'il existe) au voisinage de ce point, quand la partie régulière est de la forme $\alpha + \beta(x - x_0)$...

b) Au voisinage de 0, on a :

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$ (avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$), d'où :

$\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$, et donc :

$$\boxed{\sin x - x \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{6}}$$

☞ Se souvenir qu'une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en $x_0 \in \mathbb{R}$ est toujours équivalente en x_0 au monôme de plus bas degré de la partie régulière de son d.l. à l'ordre n en x_0 (si la partie régulière de celui-ci n'est pas nulle).

2) a) f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, d'après le résultat de la question 1b, on peut écrire : $\frac{x - \sin x}{x^3} \underset{0}{\sim} \frac{1}{6}$. On peut donc écrire : $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{6}$, et donc, comme $f(0) = \frac{1}{6}$, f est également continue en 0. On peut alors conclure :

$$\boxed{\text{f est continue sur } \mathbb{R}^+}$$

b) ❏ g est dérivable sur $]1, +\infty[$ en tant que produit et quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions dérivables sur $]1, +\infty[$.

i) Première méthode : recherche de la limite de $x \mapsto \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$ quand x tend vers 1.

❏ On a :

$$\forall x \in \,]1, +\infty[, \ \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \frac{\frac{(x+2)(x-1)}{x \ln x} - 3}{x - 1} \quad \text{soit :}$$

$$= \frac{(x+2)(x-1) - 3x \ln x}{x(x-1)\ln x}.$$

Or, au voisinage de 0, on a : $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2 \varepsilon_1(u)$ (avec $\lim\limits_{u \to 0} \varepsilon_1(u) = 0$), d'où, en posant $u = x - 1$ (u tend vers 0 lorsque x tend vers 1), au voisinage de 1 :

$\ln x = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + (x-1)^2 \varepsilon_2(x)$ (avec $\lim\limits_{x \to 1} \varepsilon_2(x) = 0$), soit :

$\ln x = (x - 1) \left(1 - \frac{(x-1)}{2} + (x-1)\varepsilon_2(x)\right).$

On en déduit alors, au voisinage de 1 :

$$\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \frac{(x-1)\left[(x+2) - 3x\left(1 - \frac{(x-1)}{2} + (x-1)\varepsilon_2(x)\right)\right]}{x(x-1)\ln x} \quad \text{soit, en simplifiant par } x - 1 :$$

$$= \frac{(x+2) - 3x\left(1 - \frac{(x-1)}{2} + (x-1)\varepsilon_2(x)\right)}{x \ln x} \quad \text{i.e. :}$$

$$= \frac{-2(x-1) + 3x\left(\frac{(x-1)}{2} - (x-1)\varepsilon_2(x)\right)}{x \ln x} \quad \text{et donc :}$$

$$= \frac{(x-1)\left(-2 + \frac{3x}{2} - \varepsilon_3(x)\right)}{x \ln x} \quad (\text{avec } \lim_{x \to 1} \varepsilon_3(x) = 0).$$

Comme $\lim\limits_{x \to 1} \left(-2 + \frac{3x}{2} - \varepsilon_3(x)\right) = -\frac{1}{2}$, on a : $(x-1)\left(-2 + \frac{3x}{2} - \varepsilon_3(x)\right) \underset{1}{\sim} -\frac{1}{2}(x-1)$. De plus, d'après le cours, on peut écrire : $\ln x \underset{1}{\sim} x - 1$, d'où, comme $x \underset{1}{\sim} 1$: $x \ln x \underset{1}{\sim} x - 1$.

On en déduit alors : $\dfrac{(x-1)\left(-2 + \frac{3x}{2} - \varepsilon_3(x)\right)}{x \ln x} \underset{1}{\sim} -\frac{1}{2}$, et donc : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{g(x) - g(1)}{x - 1} = -\frac{1}{2}$. Ainsi, g est dérivable en 1 (de nombre dérivé $-\frac{1}{2}$).

- On peut maintenant conclure :

$$\boxed{g \text{ est dérivable sur } [1, +\infty[\text{ et } g'(1) = -\frac{1}{2}}$$

☞ Pour les calculs de limites où l'on est en présence d'une forme indéterminée que l'on ne peut lever avec équivalents (à cause notamment de la présence de sommes), on peut utiliser des développements limités.

ii) Deuxième méthode : recherche d'un d.l. à l'ordre 1 au voisinage de 1 de g(x).

On a vu qu'au voisinage de 1 (cf. supra), on a : $\ln x = (x-1)\left(1 - \frac{(x-1)}{2} + (x-1)\varepsilon_1(x)\right)$ (avec $\lim\limits_{x \to 1} \varepsilon_1(x) = 0$). On en déduit alors, toujours au voisinage de 1 :

$$\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{(x-1)\left(1 - \frac{(x-1)}{2} + (x-1)\varepsilon_1(x)\right)}.$$

Or, au voisinage de 0, on a : $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u\varepsilon_2(u)$ (avec $\lim\limits_{u\to 0} \varepsilon_2(u) = 0$). En posant $u = -\frac{x-1}{2} + (x-1)\varepsilon_1(x)$ (u tend vers 0 lorsque x tend vers 1), on en déduit alors, au voisinage de 1 :

$$\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x-1}\left(1 + \frac{(x-1)}{2} + (x-1)\varepsilon_3(x)\right) \text{ (avec } \lim_{x\to 1} \varepsilon_3(x) = 0\text{).}$$

De même, en posant $u = x - 1$ (u tend vers 0 lorsque x tend vers 1), on a également au voisinage de 1 :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)} = 1 - (x-1) + (x-1)\varepsilon_4(x) \text{ (avec } \lim_{x\to 1} \varepsilon_4(x) = 0\text{).}$$

On peut maintenant écrire, toujours au voisinage de 1 :

$$\frac{1}{x\ln x} = \frac{1}{x-1}\left(1 - \frac{(x-1)}{2} + (x-1)\varepsilon_5(x)\right) \text{ (avec } \lim_{x\to 1} \varepsilon_5(x) = 0\text{), d'où :}$$

$$\frac{(x+2)(x-1)}{x\ln x} = (x+2)\left(1 - \frac{(x-1)}{2} + (x-1)\varepsilon_5(x)\right)\text{, ce qui s'écrit encore :}$$

$$g(x) = (3 + (x-1))\left(1 - \frac{(x-1)}{2} - (x-1)\varepsilon_5(x)\right)\text{, et donc :}$$

$$= 3 - \frac{1}{2}(x-1) + (x-1)\varepsilon_6(x) \text{ (avec } \lim_{x\to 1} \varepsilon_6(x) = 0\text{).}$$

g admet donc un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 1. g est donc dérivable en 1, d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{g est dérivable sur } [1, +\infty[\text{ et } g'(1) = -\frac{1}{2}}$$

☞ Se souvenir que, pour montrer qu'une fonction f est dérivable en un point x_0 (posant problème), on peut soit considérer le taux d'accroissement de f en x_0, soit montrer que f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0.

c) ❑ h est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ en tant que somme et quotients (dont les dénominateurs respectifs ne s'annulent pas) de fonctions continues sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et on a : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $h(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x}$.

De plus, au voisinage de 0, on a :

$\sin x = x + x^2\varepsilon_1(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$) soit :

$= x(1 + x\varepsilon_1(x))$ et :

$\cos x = 1 + x\varepsilon_2(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$) soit :

$x\cos x = x(1 + x\varepsilon_2(x))$ d'où :

$\sin x - x\cos x = x^2\varepsilon_3(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$).

On en déduit alors, comme $x\sin x \underset{0}{\sim} x^2$: $h(x) \underset{0}{\sim} \varepsilon_3(x)$ et donc, comme : $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$: $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0 = h(0)$. Ainsi, h est donc également continue en 0. h est donc continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

❑ h est de classe C^1 sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ en tant que somme et quotients (dont les dénominateurs ne s'annulent pas) de fonctions de classe C^1 sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

De plus, on a :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], h'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \qquad \text{soit :}$$

$$= \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \qquad \text{et donc :}$$

$$= \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}.$$

Or, au voisinage de 0, on a :

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_6(x)$ (avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_6(x) = 0$), d'où :

$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + x^4\varepsilon_7(x)$ (avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_7(x) = 0$), et donc :

$x^2 - \sin^2 x = \frac{x^4}{3} + x^4\varepsilon_8(x)$ (avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_8(x) = 0$).

On en déduit alors :

- $x^2 - \sin^2 x \underset{0}{\sim} \frac{x^4}{3}$, et :
- $\sin^2 x \underset{0}{\sim} x^2$, d'où : $x^2 \sin^2 x \underset{0}{\sim} x^4$, et donc :

$\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{x^4}{3}}{x^4}$, i.e. :

$h'(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{3}$.

On peut maintenant écrire : $\lim\limits_{x \to 0} h'(x) = \frac{1}{3}$.

❑ h étant continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, de classe C^1 sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et h' admettant une limite finie en 0, on peut maintenant conclure, d'après le théorème de prolongement des fonctions de classe C^1 :

$$\boxed{h \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } h'(0) = \frac{1}{3}}$$

d) ❑ f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$. f est donc continue en 0, donc continue sur $\mathbb{R}^+$.

❑ f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

❑ De plus, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \qquad \text{d'où :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f''(x) = \frac{x^2(\cos x - x\sin x - \cos x) - 2x(x\cos x - \sin x)}{x^4} \qquad \text{et donc :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f''(x) = \frac{(2 - x^2)\sin x - 2x\cos x}{x^3}.$$

❑ Par ailleurs, un développement limité de cos à l'ordre 2 au voisinage de 0 nous permet d'écrire :

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x)$ (avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$), d'où :

$x\cos x = x + x^2\varepsilon_2(x)$ (avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$).

De même, un développement limité de sin à l'ordre 2 au voisinage de 0 nous permet décrire :

$\sin x = x + x^2\varepsilon_3(x)$ (avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$), d'où, quand x est au voisinage de 0 :

$f'(x) = \frac{x + x^2\varepsilon_2(x) - x - x^2\varepsilon_3(x)}{x^2}$ donc :

$= \varepsilon_4(x)$ (avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_4(x) = 0$).

On a donc :

$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0.$

❑ Enfin, un développement limité de $\sin x$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 nous permet d'écrire :

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)$ (avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$), d'où :

$(2 - x^2)\sin x = 2x - \frac{4x^3}{3} + x^3\varepsilon_2(x)$ (avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$).

De même, un développement limité de $\cos x$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 nous permet d'écrire :

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_3(x)$ (avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$), d'où :

$2x\cos x = 2x - x^3 + x^3\varepsilon_4(x)$ (avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_4(x) = 0$).

On en déduit alors, toujours au voisinage de 0 :

$(2 - x^2)\sin x - 2x\cos x = -\frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_5(x)$ (avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_5(x) = 0$), d'où :

$f''(x) = -\frac{1}{3} + \varepsilon_5(x)$, et donc :

$\lim_{x\to 0} f''(x) = -\frac{1}{3}.$

❑ Comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}^*_+$ et comme f'' admet une limite finie en 0, on peut alors conclure, d'après le théorème de prolongement des fonctions de classe C^p ($p \in \mathbb{N}^*$) :

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \text{ (avec } f'(0) = 0 \text{ et } f''(0) = -\frac{1}{3})}$$

☞ Se souvenir du théorème de prolongement des fonctions de classe C^p ($p \in \mathbb{N}^*$) : si f est une fonction définie sur [a, b] (où a et b sont deux réels, ou éventuellement $a = -\infty$), et si :

– f est continue sur [a, b],

– f est de classe C^p sur]a, b],

– $f^{(p)}$ admet une limite finie ℓ à droite en a,

alors f est de classe $C^{(p)}$ sur [a, b], avec : $f^{(p)}(a) = \ell$.

Soient p un entier naturel non nul, a et b deux réels tels que a < b et f une fonction continue sur [a, b] et de classe C^p sur]a, b]. Si $f^{(p)}$ admet une limite finie en a, alors f est de classe $C^{(p)}$ sur [a, b].

3) On a :

$\tan' = 1 + \tan^2$ d'où :

$\tan'' = 2\tan\tan'$ soit :

$= 2\tan(1+\tan^2)$ et donc :

$\tan'' = 2\tan + 2\tan^3$ et :

$\tan^{(3)} = 2\tan' + 6\tan^2\tan'$ soit :

$= 2(1+\tan^2) + 6\tan^2(1+\tan^2)$ soit enfin :

$= 2 + 8\tan^2 + 6\tan^4.$

La fonction tan étant de classe C^∞ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, elle est de classe C^3 au voisinage de 0. La formule de Taylor-Young à l'ordre 3 appliquée à la fonction tan au voisinage de 0 nous permet alors d'écrire :

$\tan x = \tan 0 + x\tan' 0 + \frac{x^2}{2}\tan'' 0 + \frac{x^3}{6}\tan^{(3)} 0 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, soit, d'après les résultats précédents, comme $\tan 0 = 0$:

$$\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0}$$

☞ Plusieurs méthodes sont possibles pour calculer le développement limité d'une fonction f au voisinage d'un point, notamment :
– l'utilisation de la formule de Taylor-Young à l'aide des dérivées successives de f,
– les opérations sur les développements limités (cf. exercice 1, question 4a)
– utiliser une équation différentielle (ici, l'équation $\tan' = 1 + \tan^2$) et utiliser l'unicité du développement limité d'une fonction au voisinage d'un point en procédant soit par dérivations successives (dûment justifiées), soit par intégrations successives. On aurait également pu remarquer, préalablement à cette étude, que la fonction tan étant impaire, son développement limité en 0 ne peut comporter que des monômes de degré impair, ce qui vient limiter le nombre d'équations à résoudre pour obtenir les coefficients du d.l. recherché.

4) a) Au voisinage de 0^+, on a :

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ d'où :

$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ soit :

$f(x) = \dfrac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}$ et comme au voisinage de 0^+, $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$, en posant $u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$,

comme u est au voisinage de 0 lorsque x est au voisinage de 0 :

$= 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^2 + o(x^2)$ d'où :

$= 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) + \frac{x^2}{4} + o(x^2)$ et donc :

$$\boxed{\text{Au voisinage de } 0^+,\ f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Comme f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+$, f est de classe C^2 sur $[0, x]$ et d'après la formule de Taylor-Young, on a au voisinage de 0^+ :

$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + o(x^2).$

Par unicité de la partie régulière du développement limité, on en déduit d'après le résultat précédent :

$$\boxed{f(0) = 1,\ f'(0) = -\frac{1}{2} \text{ et } f''(0) = \frac{1}{6}}$$

5) On a :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \exp\left(x^2 \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right)$ et comme $\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ où $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$:

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \exp\left(-x - \frac{1}{2} + \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ soit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{f(x)}{\exp\left(-x - \frac{1}{2}\right)} = \exp\left(\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Comme : $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ et : $\lim\limits_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$ (car exp est continue en 0), on en déduit :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\exp\left(-x - \frac{1}{2}\right)} = 1 \quad \text{et donc :}$$

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-(x+1/2)}}$$

★ 3. Inégalités fonctionnelles ①

1) ❑ La fonction sin étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, elle est de classe C^2 sur $[0, x]$. Comme $\sin'' = -\sin$, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à l'ordre 1 à la fonction sin sur $[0, x]$ nous permet alors d'écrire : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \sin x = x - \int_0^x (x - t)\sin t\, dt$.

Or, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction $t \mapsto (x - t)\sin t$ est positive sur $[0, x]$. Par positivité de l'intégration, on a donc :

$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \int_0^x (x - t)\sin t\, dt \geq 0$ d'où :

$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \sin x \leq x.$

❑ De même, la fonction sin étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, elle est de classe C^4 sur $[0, x]$.

Comme $\sin^{(4)} = \sin$, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à l'ordre 3 à la fonction sin sur $[0, x]$ nous permet alors d'écrire :

$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x - t)^3}{6}\sin t\, dt.$

Or, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction $t \mapsto \frac{(x - t)^3}{6}\sin t$ est positive sur $[0, x]$. Par positivité de l'intégration, on en déduit alors :

$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \int_0^x \frac{(x - t)^3}{6}\sin t\, dt \geq 0$ d'où :

$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$.

❑ On peut maintenant conclure :

$$\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x}$$

☞ Pour comparer une fonction à la partie régulière de son développement limité, la méthode la plus simple est d'utiliser la formule de Taylor avec reste intégral, puis de déterminer le signe du reste intégral.

☞ Les encadrements précédents ne pouvaient être obtenus à l'aide de développements limités. En effet, un d.l. ne permet d'obtenir de résultat pertinent que localement.

☞ Pour démontrer un encadrement de fonctions, on peut utiliser :
– soit **la formule de Taylor avec reste intégral,** les fonctions encadrantes étant alors la partie régulière d'un développement limité de la fonction encadrée,
– soit **l'inégalité des accroissements finis,** on reconnaît alors au centre de l'encadrement une fonction prise en deux points,
– soit **l'inégalité de convexité** appliquée à la fonction centrale, les fonctions encadrantes étant des fonctions affines,
– soit enfin (si aucune des méthodes précédentes n'est possible), **deux études de fonctions.**

2) ❑ La fonction ln étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, elle est de classe C^2 sur $[1, 1+x]$.

On a : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\ln''(t) = -\frac{1}{t^2}$. La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à l'ordre 1 à la fonction ln sur $[1, 1+x]$ $(x \geq 0)$ nous permet alors d'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ln(1+x) = x - \int_1^{1+x} \frac{(1+x)-t}{t^2}\,dt.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la fonction $t \mapsto \frac{(1+x)-t}{t^2}$ est positive sur $[1, 1+x]$. Par positivité de l'intégration, on en déduit alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \int_1^{1+x} \frac{(1+x)-t}{t^2}\,dt \geq 0 \qquad \text{d'où :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ln(1+x) \leq x.$$

❑ De même, la fonction ln étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, elle est de classe C^3 sur $[1, 1+x]$. De plus, on a : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\ln^{(3)}(t) = \frac{1}{t^3}$. La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à l'ordre 2 à la fonction ln sur $[1, 1+x]$ $(x \geq 0)$ nous permet alors d'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \int_1^{1+x} \frac{((1+x)-t)^2}{t^3}\,dt.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la fonction $t \mapsto \frac{((1+x)-t)^2}{t^3}$ est positive sur $[1, 1+x]$. Par positivité de l'intégration, on en déduit alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \int_1^{1+x} \frac{((1+x)-t)^2}{t^3}\,dt \geq 0 \qquad \text{d'où :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}.$$

On peut maintenant conclure :

$$\boxed{\forall x\in \mathbb{R}^+, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x}$$

☞ Pour comparer une fonction à la partie régulière de son développement limité, la méthode la plus simple est d'utiliser la formule de Taylor avec reste intégral, puis de déterminer le signe du reste intégral.

☞ Les encadrements précédents ne pouvaient être obtenus à l'aide de développements limités. En effet, un d.l. ne permet d'obtenir de résultat pertinent que localement.

☞ Pour démontrer un encadrement de fonctions, on peut utiliser :
– soit **la formule de Taylor avec reste intégral** (ou encore la formule de Taylor-Lagrange mais celle-ci est à la limite du programme), si les fonctions encadrantes étant alors la partie régulière d'un développement limité de la fonction encadrée,
– soit **l'inégalité des accroissements finis**, on reconnaît alors au centre de l'encadrement une fonction prise en deux points,
– soit **une inégalité de convexité** appliquée à la fonction centrale, les fonctions encadrantes étant des fonctions affines,
– soit enfin (si aucune des méthodes précédentes n'est possible), **deux études de fonctions.**

3) Soit $x\in \mathbb{R}^+$. La fonction exp étant de classe C^3 sur $[0, x]$, d'après la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à exp à l'ordre 2 sur $[0, x]$, on a :

$$e^x = \sum_{k=0}^{2} \frac{x^k}{k!}\exp^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!}\exp^{(3)}(t)\,dt$$ et comme $\exp^{(k)} = \exp$:

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}e^t\,dt \quad ①.$$

De plus, on a :

$\forall t\in [0, x], 0 \leq e^t$ et comme $\frac{(x-t)^2}{2} \geq 0$:

$\forall t\in [0, x], 0 \leq \frac{(x-t)^2}{2}e^t$ soit par croissance de l'intégration $(x \geq 0)$:

$0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}e^t\,dt$ et d'après la relation ① :

$$\boxed{\forall x\in \mathbb{R}^+, e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}}$$

☆ ☆ 4. Formule de Taylor-Lagrange ②

Comme f est de classe C^{n+1} sur I, φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ en tant que somme et produits de fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. De plus, on a : $\varphi(b) = f(b) - f(b) = 0$, et, par la définition de A : $\varphi(a) = 0$. Le théorème de Rolle appliqué à φ nous permet alors d'écrire : $\exists c\in]a, b[, \varphi'(c) = 0$.

Or par la définition de φ, on a :

$$\forall x\in]a, b[, \varphi'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!}A$$ soit, en effectuant le changement de variable $k' = k - 1$ dans la première somme :

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!}A$$ et donc, les termes des deux sommes s'éliminant deux à deux (pour $k\in [0, n-1]$) :

$$= -\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!} A \qquad \text{i.e. :}$$

$$= \frac{(b-x)^n}{n!} (A - f^{(n+1)}(x)).$$

Comme $\exists c \in]a, b[, \varphi'(c) = 0$, on peut alors écrire que : $\exists c \in]a, b[, \frac{(b-c)^n}{n!} (A - f^{(n+1)}(c)) = 0$, soit, comme $\frac{(b-c)^n}{n!} \neq 0$ ($c \in]a, b[$), on peut écrire : $\exists c \in]a, b[, A - f^{(n+1)}(c) = 0$, i.e. :
$\exists c \in]a, b[, A = f^{(n+1)}(c)$.

Par définition de φ, on en déduit alors :

$\exists c \in]a, b[, \forall x \in [a, b], \varphi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ soit, en prenant cette relation en a :

$\exists c \in]a, b[, \varphi(a) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ et comme $\varphi(a) = 0$:

$$\boxed{\exists c \in]a, b[, f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)}$$

N.B. : On peut également démontrer cette formule à l'aide du théorème de la moyenne (hors-programme) à partir de la formule de Taylor avec reste intégral.

☞ Se souvenir de la formule de Taylor-Lagrange et de sa démonstration (résultat à la limite du programme).

☞ Se souvenir que, pour montrer une égalité (ou une inégalité) entre deux fonctions, on peut introduire une fonction auxiliaire afin de de montrer une égalité (ou une inégalité) plus simple.

☆ ☆ 5. Propriétés des fonctions convexes ②

1) ❏ La fonction f étant de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, la formule de Taylor-Young appliquée à l'ordre 2 à f permet d'écrire, quand h est au voisinage de 0 :

$f(x+h) - f(x) = h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + h^2 \varepsilon_1(h)$ et :

$f(x-h) - f(x) = -h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + h^2 \varepsilon_2(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = \lim\limits_{h\to 0} \varepsilon_2(h) = 0$.

On obtient alors, en sommant ces deux égalités, quand h est au voisinage de 0 :

$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) = h^2 f''(x) + h^2 \varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ et donc :

$g_x(h) \sim f''(x)$

g_x admet donc une limite en 0 et on peut conclure :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{h\to 0} g_x(h) = f''(x)}$$

2) f étant convexe sur $\mathbb{R}$, elle vérifie la relation :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ soit, en substituant $x + h$ à x, $x - h$ à y et $\frac{1}{2}$ à λ :

$\forall (x, h) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{1}{2}(x+h) + \frac{1}{2}(x-h)\right) \leq \frac{1}{2}(f(x+h) + f(x-h))$ soit encore :

$\forall (x, h) \in \mathbb{R}^2, f(x) \leq \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2}$ et donc :

$\forall (x, h) \in \mathbb{R}^2, f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \geq 0.$

On en déduit alors :

$\forall (x, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, g_x(h) \geq 0$ donc, d'après le théorème de prolongement des inégalités, les deux membres de l'inégalité admettant une limite finie quand h tend vers 0 :

$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) \geq 0.$

On peut finalement conclure :

$\boxed{\text{Si f est convexe, alors : } \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) \geq 0}$

☞ Se souvenir que, si f est une fonction convexe de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, alors : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) \geq 0$ (propriété hors-programme, seule la réciproque faisant partie du cours).

★ 6. Meilleure majoration ②

1) a) ❑ f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$, et l'on a :

$\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = \frac{1}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x}$ soit, après simplifications :

$= \frac{x^2}{2(1+x)^2}$ d'où :

$\geq 0.$

Ainsi, f est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $f(0) = 0$, on en déduit donc :

$\forall x \in \mathbb{R}^+, 0 \leq f(x).$

❑ Considérons alors la fonction F définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^+, F(x) = \frac{x^3}{6} - f(x)$. F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$, et l'on a, d'après les calculs effectués précédemment :

$\forall x \in \mathbb{R}^+, F'(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2(1+x)^2}$ donc :

$= \frac{x^3(x+2)}{2(1+x)^2}$ d'où :

$\geq 0.$

Ainsi, F est croissante sur $\mathbb{R}^+$, ce qui nous permet d'écrire, comme $F(0) = 0$:

$\forall x \in \mathbb{R}^+, F(x) \geq 0$ et donc :

$\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leq \frac{x^3}{6}.$

On peut finalement conclure :

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+, 0 \leq f(x) \leq \frac{x^3}{6}}$

b) D'après le cours, il existe des fonctions ε_1 et ε_2 (de limite nulle en 0) telles que, quand x est au voisinage de 0 :

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3\varepsilon_1(x)$ et :

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_2(x)$ donc, quand x est au voisinage de 0 :

$\frac{x}{2(1+x)} + \frac{x}{2} - \ln(1+x) = \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$, avec : $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ d'où :

$$\boxed{\text{Quand x est au voisinage de 0, } f(x) = \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

2) Soit $A = \{k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^+, 0 \leq f(x) \leq kx^3\}$. On a : $A \subset \mathbb{R}^+$, et : $\frac{1}{6} \in A$, donc A est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. A admet donc une borne inférieure. Soit alors $k = \inf A$.

On a alors :

$\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leq kx^3 \leq \frac{x^3}{6}$ donc, en divisant par $x^3 > 0$ (si $x > 0$) :

$\forall x \in \mathbb{R}^*_+, \frac{f(x)}{x^3} \leq k \leq \frac{1}{6}$.

Or, d'après le résultat précédent, on a : $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \frac{1}{6}$, donc, d'après le théorème de prolongement des inégalités :

$\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{1}{6}$ soit finalement :

$$\boxed{k = \frac{1}{6}}$$

N.B. : On pouvait également procéder par l'absurde, en supposant l'existence d'un réel k inférieur strictement à $\frac{1}{6}$ vérifiant la relation souhaitée, et aboutir à une contradiction.

☆ ☆ 7. Développement limité et extremum ③

1) En considérant le développement limité de f au voisinage de 0, on peut écrire que :

$\forall x \in I, f(x) - \alpha = x^n (\varepsilon(x) + \beta)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

❏ Supposons n pair. On peut alors écrire : $\forall x \in I, x^n \geq 0$.

De plus, comme $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, on peut également écrire :

$\exists \eta > 0, \forall x \in I \cap]-\eta, \eta[, |\varepsilon(x)| < |\beta|$.

Deux cas se présentent alors :

• Si $\beta > 0$, on peut alors écrire : $\exists \eta > 0, \forall x \in I \cap]-\eta, \eta[, -\beta < \varepsilon(x) < \beta$, et donc :

$\exists \eta > 0, \forall x \in I \cap]-\eta, \eta[, \varepsilon(x) + \beta > 0$.

On en déduit alors : $\exists \eta > 0, \forall x \in I \cap]-\eta, \eta[, x^n (\varepsilon(x) + \beta) \geq 0$, ce qui s'écrit encore :

$\exists \eta > 0, \forall x \in I \cap]-\eta, \eta[, f(x) - \alpha \geq 0$ i.e. :

$\exists \eta > 0, \forall x \in I \cap]-\eta, \eta[, f(x) \geq \alpha$.

Comme $f(0) = \alpha$ (d'après le développement limité de f au voisinage de 0), f possède donc un minimum local en 0.

• Si $\beta < 0$, on peut alors écrire : $\exists\eta > 0, \forall x\in I \cap]-\eta, \eta[, \beta < \varepsilon(x) < -\beta$, et donc :

$\exists\eta > 0, \forall x\in I \cap]-\eta, \eta[, \varepsilon(x) + \beta < 0$.

On en déduit alors : $\exists\eta > 0, \forall x\in I \cap]-\eta, \eta[, x^n (\varepsilon(x) + \beta) \leq 0$, ce qui s'écrit encore :

$\exists\eta > 0, \forall x\in I \cap]-\eta, \eta[, f(x) - \alpha \leq 0$ i.e. :

$\exists\eta > 0, \forall x\in I \cap]-\eta, \eta[, f(x) \leq \alpha$.

Comme $f(0) = \alpha$, f possède donc un maximum local en 0.

❑ Supposons maintenant n impair. On peut alors écrire : $\forall x\in I, x < 0, x^n < 0$ et $\forall x\in I, x > 0, x^n > 0$. Deux cas se présentent alors :

• Si $\beta > 0$, comme $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, on peut écrire (cf. cas précédent) :
$\exists\eta > 0, \forall x\in I \cap]-\eta, \eta[, \varepsilon(x) + \beta > 0$.

On en déduit alors :

– $\exists\eta > 0, \forall x\in I \cap]-\eta, 0[, x^n (\varepsilon(x) + \beta) < 0$, soit : $\exists\eta > 0, \forall x\in I \cap]-\eta, 0[, f(x) < \alpha$, et :

– $\exists\eta > 0, \forall x\in I \cap]0, \eta[, x^n (\varepsilon(x) + \beta) > 0$, soit : $\exists\eta > 0, \forall x\in I \cap]0, \eta[, f(x) > \alpha$.

f ne possède donc pas d'extremum local en 0.

• Si $\beta < 0$, comme $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, on peut écrire (cf. cas précédent) :
$\exists\eta > 0, \forall x\in I \cap]-\eta, \eta[, \varepsilon(x) + \beta < 0$.

On en déduit alors :

– $\exists\eta > 0, \forall x\in I \cap]-\eta, 0[, (x - a)^n (\varepsilon(x) + \beta) > 0$, soit : $\exists\eta > 0, \forall x\in I \cap]-\eta, 0[, f(x) > \alpha$, et :

– $\exists\eta > 0, \forall x\in I \cap]0, \eta[, (x - a)^n (\varepsilon(x) + \beta) < 0$, soit : $\exists\eta > 0, \forall x\in I \cap]0, \eta[, f(x) < \alpha$.

f ne possède donc pas d'extremum local en 0.

❑ On peut maintenant conclure :

Si n est pair, f possède un extremum local en 0 (si $\beta > 0$, cet extremum est un minimum et si $\beta < 0$, cet extremum est un maximum) et si n est impair, f ne possède pas d'extremum local en 0.

2) ■ Comme g admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0, g admet également un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 : $g(x) = \alpha + \beta x + x\eta(x)$ (avec $\lim\limits_{x\to 0} \eta(x) = 0$).

g est donc dérivable en 0 de nombre dérivé β. Or, d'après le cours, on sait que si g est dérivable en 0, alors sa courbe représentative admet en $(0, g(0))$ une tangente d'équation $y = g(0) + x g'(0)$. On en déduit alors :

La courbe représentative de g admet pour tangente en $(0, g(0))$ la droite d'équation $y = \alpha + \beta x$

■ ❑ D'après le développement limité de g, on a, lorsque x est au voisinage de 0 :
$g(x) - (\alpha + \beta x) = \gamma x^2 + x^2\varepsilon(x)$.

Soit alors f la fonction définie sur I par : $\forall x\in I, f(x) = g(x) - (\alpha + \beta x)$. On peut donc écrire, quand x est au voisinage de a :
$f(x) = \gamma x^2 + x^2\varepsilon(x)$.

• Ainsi, en considérant le résultat de la question précédente pour $\alpha = 0$ et $\gamma > 0$, on peut écrire, comme 2 est pair, que f présente un minimum local en 0, et donc, par définition de f, que :

$\exists\eta > 0, \forall x \in I \cap]-\eta, \eta[, g(x) - (\alpha + \beta x) \geq f(0)$ soit, comme $f(0) = 0$:

$\exists\eta > 0, \forall x \in I \cap]-\eta, \eta[, g(x) \geq \alpha + \beta x$.

Ainsi, si $\gamma > 0$, la courbe représentative de g est située au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.

• De même, en considérant le résultat de la question précédente pour $\alpha = 0$ et $\gamma < 0$, on peut écrire, comme 2 est pair, que f présente un maximum local en 0, et donc, par définition de f, que :

$\exists\eta > 0, \forall x \in I \cap]-\eta, \eta[, g(x) - (\alpha + \beta x) \leq f(0)$ soit, comme $f(0) = 0$:

$\exists\eta > 0, \forall x \in I \cap]-\eta, \eta[, g(x) \leq \alpha + \beta x$.

Ainsi, si $\gamma > 0$, la courbe représentative de g est située en-dessous de sa tangente au voisinage de 0.

❑ On peut maintenant conclure :

> La courbe représentative de g est située "au-dessus" (resp. "en dessous") de sa tangente en $(0, g(0))$ au voisinage de 0 si $\gamma > 0$ (resp. si $\gamma < 0$).

☞ Retenir la méthode pour comparer une fonction à sa tangente au voisinage d'un point.

★ 8. Théorème de division ③

1) a) f étant une fonction de classe C^{n+1} sur I, f est continue sur I^- et sur I^+. g est donc continue sur I^- et sur I^+ en tant que quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sur I^- et sur I^+.

De plus, f étant une fonction de classe C^{n+1} sur I, f est dérivable en 0. On en déduit alors que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$, et donc, comme $f(0) = 0$: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = f'(0) = g(0)$. g est donc également continue en 0. On peut maintenant conclure :

$$\boxed{\text{g est continue sur I}}$$

b) f étant une fonction de classe C^{n+1} sur I, f est dérivable sur I^- et sur I^+. g est donc dérivable sur I^- et sur I^+ en tant que quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions dérivables sur I^- et sur I^+. De plus, on a :

$\forall x \in I \setminus \{0\}, \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - xf'(0)}{x^2}$ et donc, comme f est de classe C^2 au voisinage de 0, d'après la formule de Taylor-Young :

$= \dfrac{\frac{x^2}{2}f''(0) + x^2\varepsilon(x)}{x^2}$ i.e. :

$= \frac{f''(0)}{2} + \varepsilon(x)$ et donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{f''(0)}{2}$$

On peut maintenant conclure :

$$\boxed{\text{g est dérivable sur I avec : } g'(0) = \frac{f''(0)}{2}}$$

2) ▪ f étant une fonction de classe C^{n+1} sur I et $x \mapsto x$ une fonction de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$, ces fonctions sont de classe C^n sur I. g est donc de classe C^n sur sur I^- et sur I^+ en tant que quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions de classe C^n sur sur I^- et sur I^+, d'où la conclusion :

$$\boxed{g \text{ est de classe } C^n \text{ sur sur } I^- \text{ et sur } I^+}$$

▪ Les fonctions f et $h : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ étant de classe C^n sur I^- et sur I^+, la formule de Leibniz nous permet alors d'écrire :

$\forall x \in I \setminus \{0\}, g^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)}(x)\, h^{(n-i)}(x)$.

Comme $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, h^{(p)}(x) = (-1)^p \dfrac{p!}{x^{p+1}}$ (démonstration par récurrence, cf. chapitre 10), on a donc :

$\forall x \in I \setminus \{0\}, g^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \dfrac{(n-i)!}{x^{n-i+1}} f^{(i)}(x)$, soit enfin, comme $\forall i \in [0, n], \binom{n}{i} = \dfrac{n!}{i!\,(n-i)!}$:

$$\boxed{\forall x \in I \setminus \{0\}, g^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \frac{n!}{i!\, x^{n-i+1}} f^{(i)}(x)}$$

3) f étant une fonction de classe C^{n+1} sur I, pour tout $x \in I \setminus \{0\}$, f est de classe C^{n+1} sur le segment d'extrémités 0 et x. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n appliquée à f sur le segment d'extrémités 0 et x nous permet alors d'écrire :

$\forall x \in I \setminus \{0\}, f(0) = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{(-x)^i}{i!} f^{(i)}(x) + \int_x^0 \dfrac{(-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$ soit, comme $f(0) = 0$:

$\forall x \in I \setminus \{0\}, \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dfrac{x^i}{i!} f^{(i)}(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t)\, dt$ soit encore, en multipliant cette expression par $\dfrac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}}$:

$\forall x \in I \setminus \{0\}, \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n+i} \dfrac{n!}{i!\, x^{n-i+1}} f^{(i)}(x) = \dfrac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t)\, dt$ et comme $\forall i \in [0, n], (-1)^{n+i} = (-1)^{n-i}$:

$\forall x \in I \setminus \{0\}, \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \dfrac{n!}{i!\, x^{n-i+1}} f^{(i)}(x) = \dfrac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t)\, dt$ soit enfin, en reconnaissant $g^{(n)}(x)$ (cf. question 2) :

$$\boxed{\forall x \in I \setminus \{0\}, g^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t)\, dt}$$

4) ▪ Soit $x \in I^+$. Comme f est de classe C^{n+1} sur I, $f^{(n+1)}$ est continue sur I, donc sur le segment $[0, x]$. Il existe alors deux éléments a_x et b_x de $[0, x]$ tels que :

$\forall t \in [0, x], f^{(n+1)}(a_x) \leq f^{(n+1)}(t) \leq f^{(n+1)}(b_x)$ et donc, en multipliant par $t^n \geq 0$:

$\forall t \in [0, x], t^n f^{(n+1)}(a_x) \leq t^n f^{(n+1)}(t) \leq t^n f^{(n+1)}(b_x)$ soit encore, par croissance de l'intégration (fonctions continues sur $[0, x]$) :

$f^{(n+1)}(a_x) \int_0^x t^n\, dt \leq \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t)\, dt \leq f^{(n+1)}(b_x) \int_0^x t^n\, dt$ et donc :

$\dfrac{x^{n+1} f^{(n+1)}(a_x)}{n+1} \leq \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t)\, dt \leq \dfrac{x^{n+1} f^{(n+1)}(b_x)}{n+1}$ soit, en divisant pax x^{n+1}, et d'après la question précédente :

$\dfrac{f^{(n+1)}(a_x)}{n+1} \leq g^{(n)}(x) \leq \dfrac{f^{(n+1)}(b_x)}{n+1}$. ①

Comme on a : $\begin{cases} 0 \leq a_x \leq x \\ 0 \leq b_x \leq x \end{cases}$, d'après le théorème de l'encadrement : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} a_x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} b_x = 0 \end{cases}$. $f^{(n+1)}$ étant continue sur $[0, x]$, on a de plus : $\lim\limits_{x\to 0^+} f^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(0)$, et donc, par composition de limites : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f^{(n+1)}(a_x) = f^{(n+1)}(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f^{(n+1)}(b_x) = f^{(n+1)}(0) \end{cases}$. D'après l'inégalité ①, d'après le théorème d'existence d'une limite par encadrement, on obtient alors : $\lim\limits_{x\to 0^+} g^{(n)}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$.

- Si $x\in I^-$, on obtient, en procédant de même : $\lim\limits_{x\to 0^-} g^{(n)}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(0)}{n+1} = \lim\limits_{x\to 0^+} g^{(n)}(x)$.

- g étant continue sur I, de classe C^n sur I^- et sur I^+ avec $\lim\limits_{x\to 0} g^{(n)}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$, le théorème de prolongement des fonctions de classe C^p nous permet de conclure :

$$\boxed{g \text{ est de classe } C^n \text{ sur } I \text{ et } g^{(n)}(0) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}}$$

__Application__ : La fonction sin étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et comme $\sin(0) = 0$ et $\sin'(0) = 1 = g(0)$, en appliquant, pour tout $n\in\mathbb{N}$, le résultat de la question précédente à la fonction g, on peut écrire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, g est de classe C^n sur $\mathbb{R}$, donc que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On peut finalement conclure :

$$\boxed{g \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$$

★ 9. Inégalités fonctionnelles (2) ②

1) a) f étant de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 appliquée à la fonction f sur l'intervalle d'extrémités x et x+h noté $I(x, x+h)$ ($(x, h)\in\mathbb{R}^2$) nous permet d'écrire :

$$\forall x\in\mathbb{R}, \forall h\in\mathbb{R}, \left|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\right| \le \frac{\left|(x+h)-x\right|^2}{2} \sup_{t\in I(x,x+h)} \left|f''(t)\right|.$$

Or, pour tout $(x,h)\in\mathbb{R}^2$, on a clairement : $\sup\limits_{t\in I(x,x+h)} \left|f''(t)\right| \le \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \left|f''(t)\right|$, et comme $M_2 = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \left|f''(t)\right|$, on en conclut alors :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}, \forall h\in\mathbb{R}, \left|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\right| \le \frac{M_2h^2}{2}}$$

b) ▪ Pour $h = t$ ($t\in\mathbb{R}_+^*$), la relation précédente devient :

$\forall x\in\mathbb{R}, \forall t\in\mathbb{R}_+^*, -\dfrac{M_2t^2}{2} \le f(x+t) - f(x) - tf'(x) \le \dfrac{M_2t^2}{2}$ soit :

$\forall x\in\mathbb{R}, \forall t\in\mathbb{R}_+^*, -\dfrac{M_2t^2}{2} \le tf'(x) + f(x) - f(x+t) \le \dfrac{M_2t^2}{2}$.

Et pour $h = -t$ ($t\in\mathbb{R}_+^*$), la relation établie dans la question précédente devient :

$\forall x\in\mathbb{R}, \forall t\in\mathbb{R}_+^*, -\dfrac{M_2t^2}{2} \le f(x-t) - f(x) + tf'(x) \le \dfrac{M_2t^2}{2}$.

En sommant ces deux dernières inégalités, on trouve alors :

$\forall x\in\mathbb{R}, \forall t\in\mathbb{R}_+^*, -M_2t^2 \le 2tf'(x) + f(x-t) - f(x+t) \le M_2t^2$ soit :

$\forall x\in\mathbb{R}, \forall t\in\mathbb{R}_+^*, -M_2t^2 + f(x+t) - f(x-t) \le 2tf'(x) \le M_2t^2 + f(x+t) - f(x-t)$ et donc :

$\forall x\in\mathbb{R}, \forall t\in\mathbb{R}_+^*, \left|2tf'(x)\right| \le M_2t^2 + \left|f(x+t)\right| + \left|f(x-t)\right|$ et comme $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \left|f(t)\right| = M_0$:

$\leq M_2 t^2 + 2M_0$

soit enfin, en divisant les deux membres par $2t > 0$:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ |f'(x)| \leq \frac{M_0}{t} + \frac{M_2 t}{2}}$$

▪ D'après la question précédente, on a :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h \in \mathbb{R}_+^*,\ |f'(x)| \leq \dfrac{2M_0}{h} + \dfrac{M_2 h}{2}$ soit, en posant (par exemple) $h = 2$:

$\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leq M_0 + M_2$ soit finalement :

$$\boxed{f' \text{ est donc bornée sur } \mathbb{R}}$$

2) **a)** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$. f étant de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, on peut lui appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, entre x et x + h :

$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \dfrac{M_2 h^2}{2}$ et donc :

$f(x+h) - f(x) - f'(x)h \leq \dfrac{M}{2}h^2$ soit finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h \in \mathbb{R},\ f(x) + f'(x)h + \frac{M}{2}h^2 \geq f(x+h)}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme f est positive sur $\mathbb{R}$, on a donc :

$\forall h \in \mathbb{R},\ f(x) + f'(x)h + \dfrac{M}{2}h^2 \geq 0.$

Le trinôme $f(x) + f'(x)X + \dfrac{M}{2}X^2$ étant de signe constant sur $\mathbb{R}$, il admet au plus une racine réelle, donc son discriminant est négatif ou nul, d'où :

$(f'(x))^2 - 2Mf(x) \leq 0$ soit encore :

$(f'(x))^2 \leq 2Mf(x)$ et donc, en appliquant la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$, croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leq \sqrt{2Mf(x)}}$$

☞ Se souvenir que, si la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$, alors son discriminant est négatif ou nul, i.e. : $b^2 - 4ac \leq 0$.

☆ ☆ 10. Division de polynômes ②

1) D'après le cours, on a, quand x est au voisinage de 0 :

$\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{p-1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + o(x^{p-1})$ i.e. :

$= L_p(x) + o(x^{p-1})$ donc :

$e^{\ln(x+1)} = \exp(L_p(x) + o(x^{p-1}))$ ① et :

$e^x = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{n!} x^n + o(x^{p-1})$ i.e. :

$= E_p(x) + o(x^{p-1})$ ②.

Comme $\lim_{x \to 0} L_p(x) = 0$, on peut donc conclure, d'après ① et ② :

On peut déterminer un développement limité de la fonction $x \mapsto e^{\ln(x+1)}$ au voisinage de 0 à l'ordre p - 1 en fonction de E_p et de L_p, la partie régulière de ce d.l. étant la partie tronquée à l'ordre p - 1 du polynôme $E_p \circ L_p$.

2) Comme : $\forall x \in]-1, 1[, x + 1 = e^{\ln(x+1)}$, on peut conclure, d'après le résultat précédent :

Il existe une fonction ε de limite nulle en 0 telle que, lorsque x est au voisinage de 0 : $x + 1 = T_p(x) + x^{p-1}\varepsilon(x)$, où T_p est la partie tronquée à l'ordre p - 1 du polynôme $E_p \circ L_p$.

3) ▪ On a également, quand x est au voisinage de 0 :

$x + 1 = x + 1 + o(x^{p-1})$.

Comme X + 1 est un polynôme, on peut alors conclure, par unicité du développement limité d'une fonction au voisinage d'un point :

$$\boxed{T_p = X + 1}$$

☞ Se souvenir que, si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0, alors celui-ci est unique. Ainsi, si, au voisinage de x_0, on a : $f(x) = P(x - x_0) + o((x - x_0)^n) = Q(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$, alors : P = Q.

▪ T_p étant la partie tronquée de $E_p \circ L_p$ à l'ordre p - 1, on peut écrire qu'il existe un polynôme R_p, soit nul, soit admettant un monôme de plus bas degré au moins de degré p tel que :

$E_p(L_p(X)) = X + 1 + R_p$.

Or, le monôme de plus bas degré de R_p étant, si R_p n'est pas nul, au moins de degré p, X^p divise R_p, ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\text{Il existe un polynôme } Q_p \text{ tel que : } E_p(L_p(X)) = X + 1 + X^p Q_p(X)}$$

☆☆ 11. Etude d'une fonction ②

1) a) ▪ Les fonctions f et $x \mapsto x$ étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur]0, 1[, h est de classe C^1 sur chacun de ces intervalles, et sa dérivée h' vérifie :

$\forall x \in \mathbb{R}_-^* \cup]0, 1[, h'(x) = f(x) + x f'(x)$.

Or, par hypothèse sur f, on a, en remarquant que 1 - x n'est pas nul si x appartient à l'un des intervalles $\mathbb{R}_-^*$ ou]0, 1[:

$\forall x \in \mathbb{R}_-^* \cup]0, 1[, x f'(x) = \frac{1}{1-x} - f(x)$ d'où :

h est de classe C^1 sur les intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et]0, 1[, avec : $\forall x \in \mathbb{R}_-^* \cup]0, 1[, h'(x) = \frac{1}{1-x}$

■ Ainsi, la restriction de h à chacun des intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $]0, 1[$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, ce qui nous permet de conclure, la fonction $x \mapsto -\ln(1-x)$ étant une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ sur $]-\infty, 1[$:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Il existe deux constantes réelles } c_1 \text{ et } c_2 \text{ telles que :}\\ \begin{cases}\forall x \in \mathbb{R}_-^*, h(x) = -\ln(1-x) + c_1\\ \forall x \in]0, 1[, h(x) = -\ln(1-x) + c_2\end{cases}\end{array}}$$

b) ❑ Remarquons tout d'abord que f est prolongeable par continuité en 0 si, et seulement si, f admet une limite finie en 0 à gauche et à droite et si ces deux limites sont égales.

❑ Or on a (limite usuelle) :

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\ln(1-x)}{x} = 1.$$

Ainsi, f admet une limite finie en 0 à gauche si, et seulement si, la fonction $x \mapsto \frac{c_1}{x}$ admet une limite finie en 0 à gauche, donc si, et seulement si : $c_1 = 0$. De plus, si $c_1 = 0$, on a :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1.$$

❑ De même, f admet une limite finie en 0 à droite si, et seulement si, la fonction $x \mapsto \frac{c_2}{x}$ admet une limite finie en 0 à droite, donc si, et seulement si : $c_2 = 0$. De plus, si $c_2 = 0$, on a :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1.$$

❑ Ainsi, on peut conclure :

$$\boxed{\text{f est prolongeable par continuité en 0 si, et seulement si } c_1 = c_2 = 0}$$

2) a) ■ On a :

$$\ln(1+x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$ d'où :

$$\boxed{\ln(1-x) \underset{x \to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$$

■ D'après le résultat précédent et par définition de f, il existe une fonction ε tendant vers 0 en 0 telle que, lorsque x est au voisinage de 0 :

$$f(x) = \frac{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)}{x}$$ d'où :

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon(x)$$ et donc, comme ε tend vers 0 en 0 :

$$\boxed{f(x) \underset{x \to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}$$

b) ■ De plus, d'après le développement limité de f, on a, lorsque x est au voisinage de 0 et comme f(0) = 1 :

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{2} + \frac{x}{3} + o(x)$ d'où :

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{2}$ et donc :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } 0, \text{ avec } f'(0) = \frac{1}{2}}$$

c) ▪ f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $]0, 1[$ comme quotient (dont le dénominateur ne s'annule sur aucun de ces deux intervalles) des fonctions $x \mapsto -\ln(1-x)$ et $x \mapsto x$, toutes deux de classe C^1 sur chacun de ces intervalles (la fonction $x \mapsto 1-x$ étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $]0, 1[$ et prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, intervalle sur lequel ln est de classe C^1). De plus, on a :

$\forall x \in \mathbb{R}_-^* \cup]0, 1[, f'(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{1-x} + \ln(1-x)\right)$ d'où, en factorisant x :

$= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x}\right)$ et donc, par définition de f :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_-^* \cup]0, 1[, f'(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-x} - f(x)\right)}$$

▪ f étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $]0, 1[$ et dérivable en 0, prouvons que f' est continue en 0. D'après le résultat précédent et le développement limité de f déterminé dans la question 2a, on a, lorsque x est au voisinage de 0 :

$f'(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-x} - 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)$ soit encore :

$= \frac{1}{x}\left(\frac{x}{1-x} - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)$ i.e. :

$= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} - \frac{x}{3} + o(x)$ et donc, comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1-x} = 1$:

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \frac{1}{2}$.

Comme $f'(0) = \frac{1}{2}$, f' est donc continue en 0, ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]-\infty, 1[}$$

3) a) ▪ La fonction φ est dérivable sur $]-\infty, 1[$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle, avec :

$\forall x \in]-\infty, 1[, \varphi'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x}$ d'où :

$= \frac{x}{(1-x)^2}$.

Ainsi, φ'(x) est strictement négative si x est strictement négatif, nul si x est nul et strictement positif si x est strictement positif, d'où l'on déduit les variations de φ (les monotonies étant strictes sur $\mathbb{R}^-$ et sur $[0, 1[$) :

x	$-\infty$		0		1
φ		↘	0	↗	‖

On peut donc conclure :

$$\boxed{\varphi \text{ est positive sur }]-\infty, 1[\text{ et ne s'annule qu'en } 0}$$

■ En reprenant les calculs effectués dans la question précédente, on peut écrire :

$\forall x \in \mathbb{R}_-^* \cup]0, 1[, f'(x) = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{x}{1-x} + \ln(1-x)\right)$ i.e. :

$$= \frac{\varphi(x)}{x^2}.$$

Ainsi, f' est du signe de φ sur $\mathbb{R}_-^* \cup]0, 1[$, donc, d'après le résultat précédent, strictement positive, ce qui nous permet de conclure, f étant continue sur $]-\infty, 1[$: $\boxed{\text{f est strictement croissante sur }]-\infty, 1[}$

b) ■ ❑ L'objectif étant de donner l'allure de la courbe représentative de f, déterminons, dans un premier temps, ses limites respectives en $-\infty$ et en 1.

❑ On a :

$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, f(x) = -\dfrac{\ln\left(-x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right)}{x}$ d'où, comme $-x > 0$ si $x \in \mathbb{R}_-^*$:

$$= \frac{\ln(-x)}{-x} - \frac{\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{x}.$$

Or, par croissances comparées, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(-x)}{-x} = 0$ et : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{x} = 0$, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

❑ De plus, comme $\lim\limits_{x\to 1} -\ln(1-x) = +\infty$, on a :
$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$.

❑ On peut désormais dresser le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		1
f	0	↗	$+\infty$

■ En considérant les limites respectives de f en $-\infty$ et en 1, on peut également conclure :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La courbe représentative de f admet la droite } y = 0 \text{ pour asymptote horizontale}\\ \text{au voisinage de } -\infty \text{ et la droite } x = 1 \text{ pour asymptote verticale au voisinage de 1.}\end{array}}$$

■ Par ailleurs, comme $f(0) = 1$ et comme $f'(0) = \dfrac{1}{2}$, on peut affirmer :

$$\boxed{\text{La tangente à la courbe représentative de f en } (0, 1) \text{ est la droite d'équation } y = \frac{x}{2} + 1}$$

■ Enfin, d'après le développement limité de f déterminé dans la question 2a, il existe une fonction ε tendant vers 0 en 0 telle que, quand x est au voisinage de 0 :

$$f(x) - \left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{i.e. :}$$

$$= x^2\left(\frac{1}{3} + \varepsilon(x)\right).$$

Or, comme ε tend vers 0 en 0, il existe un voisinage de 0 sur lequel la fonction $x \mapsto \frac{1}{3} + \varepsilon(x)$ est strictement positive, donc, la fonction $x \mapsto x^2$ étant positive, il existe un voisinage de 0 sur lequel la fonction $x \mapsto f(x) - \left(\frac{x}{2} + 1\right)$ est positive, ce qui nous permet de conclure :

La courbe représentative de f est "au-dessus" de sa tangente en (0, 1) au voisinage de ce point

■ On peut enfin dresser l'allure de la courbe représentative de f :