Programme de mathématiques du concours Edhec AST1

(Actualisation du 14 octobre 2011)

L'épreuve dure 2 heures et est composée de plusieurs exercices indépendants . Cette épreuve a pour objectif de vérifier la capacité du candidat à utiliser un langage et des outils mathématiques, ainsi qu'à conceptualiser un problème. Les calculatrices ne sont pas autorisées.

1 - Notions fondamentales

Aucune des notions exposées dans ce paragraphe ne pourra être l'objet d'un des exercices.
Logique élémentaire, raisonnement par récurrence.
Notions élémentaires de théorie des ensembles.
Ensembles finis, dénombrement.
Calculs et relations d'ordre dans l'ensemble des réels.
Les nombres complexes ne sont pas au programme.

2. Algèbre générale et algèbre linéaire

a. Polynômes et fractions rationnelles

Polynômes à coefficients réels en une variable : degré, division euclidienne, racines, multiplicité d'une racine, factorisation.
La division suivant les puissances croissantes n'est pas au programme.
Résolution des équations polynomiales : second degré, cas où une racine est évidente ; techniques simples de changement d'inconnue (exemple : équation bicarrée).
Si une fraction rationnelle doit être décomposée en éléments simples, la forme de la décomposition sera fournie par l'énoncé.

b. Espaces vectoriels

Résolution des systèmes d'équations linéaires par la méthode du pivot.
Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$: définition, exemples usuels : $\mathbb{R}^n$, espaces de polynômes, de suites, de fonctions continues sur un intervalle, de matrices.
Combinaison linéaire, famille libre, famille liée, famille génératrice, base, propriétés de ces notions en dimension finie.
Rang d'une famille de vecteurs.
Matrice d'une famille de vecteurs dans une base. Rang d'une matrice, détermination pratique.
Théorème de la base incomplète et applications.
Sous-espaces vectoriels ; intersection et somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.
Sous-espaces supplémentaires, caractérisations équivalentes en dimension finie.
Somme directe d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels, caractérisation en dimension finie par les bases.

c. Applications linéaires

Applications linéaires : définition, caractérisations. Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$.
Image et image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.
Notions d'endomorphisme, d'isomorphisme et d'automorphisme. Rang d'une application linéaire.
Matrice d'une application linéaire dans des bases en dimension finie.
Noyau, image. Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité. Isomorphisme d'un supplémentaire du noyau sur l'image.
En dimension finie : théorème du rang, application à la caractérisation des isomorphismes quand l'espace de départ et l'espace d'arrivée ont la même dimension.
Composition des applications linéaires, produit de matrices : condition d'existence, propriétés élémentaires.
Composition des endomorphismes : espaces vectoriels $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ensembles GL(E) et $GL_n(\mathbb{R})$.

d. Réduction des endomorphismes
Changement de base : effet sur les coordonnées d'un vecteur, effet sur la matrice d'un endomorphisme. Matrice de passage, matrices semblables.
Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres.
Les sous-espaces propres sont en somme directe.
En dimension finie : endomorphismes et matrices diagonalisables, caractérisation. Condition suffisante de diagonalisabilité.
Pratique de la diagonalisation d'une matrice, d'un endomorphisme.
La triangulation des endomorphismes non diagonalisables n'est pas au programme.
Polynômes d'endomorphismes ou de matrices : si P est un polynôme annulateur de l'endomorphisme f ou de la matrice A, alors les valeurs propres de f (ou de A) sont parmi les racines de P.
Aucune notion plus générale concernant les polynômes d'endomorphismes ou de matrices, les déterminants, la trace, les polynômes caractéristique et minimal, le théorème de Cayley-Hamilton n'est au programme.
Les notions de produit scalaire et de norme ne sont pas au programme.

3. Analyse
a. Théorie locale des fonctions
Fonctions d'une variable réelle : limites, continuité, dérivabilité, propriétés.
Somme, produit, quotient, composition de fonctions continues ou dérivables.
Passage à la limite dans les inégalités, théorème d'encadrement).
Existence d'une limite à droite et à gauche en tout point pour les fonctions monotones majorées ou minorées.
Détermination de limites, procédés simples pour lever une indétermination.
Comparaison de fonctions en un point : équivalence et négligeabilité, propriétés usuelles.

b. Fonctions usuelles
Logarithme népérien, exponentielle, puissances : propriétés, courbe représentative, limites usuelles faisant intervenir ces fonctions, comparaison.
Fonctions trigonométriques : propriétés, dérivées, limites usuelles faisant intervenir ces fonctions, valeurs particulières.
En-dehors des propriétés provenant de la parité ou de la périodicité de ces fonctions ou des symétries de leur graphe ou de celles provenant de la formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, aucune formule de trigonométrie n'est à mémoriser. Les formules issues des propriétés des nombres complexes ne sont pas au programme.

c. Théorie globale des fonctions
Fonctions continues sur un intervalle : théorème des valeurs intermédiaires. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
La notion de continuité uniforme n'est pas au programme.
Fonctions dérivables sur un intervalle : théorèmes de Rolle et des accroissements finis ; inégalité des accroissements finis.
Notion de fonction de classe C^1 sur un intervalle.
Dérivées successives, notion de fonction de classe C^k sur un intervalle. Formule de Leibniz.
Les formules de Taylor et les développements limités ne sont pas au programme.

d. Étude des fonctions
Tracé de la courbe représentative d'une fonction : domaine de définition, limites, variations, pente de la tangente ou de la demi-tangente en un point particulier,
étude des branches infinies dans les cas d'existence d'une asymptote ou d'une branche parabolique.
Équation de la tangente en un point.
L'étude de la concavité n'est pas au programme.

e. Fonctions réciproques
Théorème de la bijection, réciproque d'une application continue strictement monotone d'un intervalle sur un autre, tracé de sa courbe représentative.
La réciproque d'une application de classe C^k dont la dérivée ne s'annule pas est de classe C^k. Cas où sa dérivée s'annule en un point.
Les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques ne sont pas au programme.

f. Primitives et intégrales
On admettra que toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.
L'intégrale d'une fonction continue est supposée définie à partir d'une primitive de cette fonction ; dans le cas d'une fonction présentant des discontinuités, on recourt à la relation de Chasles pour se ramener au cas de fonctions continues sur un intervalle.
Calcul de primitives de fonctions simples.
Les exercices feront appel à des calculs simples : primitives de la forme : $u'u^{\alpha}$ $(\alpha \neq -1)$, u'/u, $u'e^{u}$.
Relation de Chasles, linéarité de l'intégrale.
Changement de variable et intégration par parties.
Si un changement de variable s'avère nécessaire, il sera fourni par l'énoncé.
Propriétés élémentaires de l'intégrale : positivité, croissance. Intégrale d'une fonction continue positive et strictement positive en au moins un point.
Formules d'encadrement : majoration (respectivement minoration) de l'intégrale d'une fonction majorée (respectivement minorée).
Interprétation d'une intégrale comme aire d'un secteur défini par la courbe représentative d'une ou deux fonctions.
Les formules de limites de sommes de Riemann ne sont pas au programme.

g. Intégrales généralisées ou impropres
Intégrale convergente, divergente. Intégrale absolument convergente.
Intégrales de référence : fonctions exponentielles et puissances.
Critères de convergence : comparaison, équivalence et négligeabilité.
Les intégrales de Bertrand ne sont pas au programme.
Calcul d'intégrales généralisées par passage à la limite dans une intégrale définie.
Comparaison de la série de terme général $f(n)$ et de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ dans le seul cas où f est continue sur $[a, +\infty[$, décroissante et de limite nulle en l'infini.
Les changements de variables et les intégrations par parties dans les intégrales généralisées peuvent être effectués au gré du candidat soit sur un segment avant passage à la limite, soit directement sur l'intervalle d'intégration, à condition dans ce dernier cas de justifier la validité du calcul.

h. Suites numériques
Définition, unicité de la limite. Limite d'une combinaison linéaire, d'une somme, d'un produit, d'un quotient de suites. Limite de la suite $(f(u_n))$, où (u_n) est une suite convergeant vers a et f une fonction admettant une limite en a.
Passage à la limite dans les inégalités, théorème de l'encadrement, théorème de convergence monotone.

Détermination de limites, procédés simples pour lever une indétermination.
Comparaison de suites en un point : équivalence et négligeabilité, propriétés usuelles.
Suites usuelles : arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique ; suites récurrentes linéaires d'ordre 2, étude dans le cas où le discriminant de l'équation caractéristique est positif ou nul.
Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$: existence des termes de la suite, monotonie, cas où f est décroissante ; équation aux limites, convergence ou divergence de la suite.
Emploi de l'inégalité des accroissements finis pour obtenir une majoration a priori de la différence entre u_n et la limite de la suite. Calcul approché d'un nombre réel
à l'aide d'une suite récurrente.
Somme des n premiers entiers, de leurs carrés, de leurs cubes ; application à la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique. Somme des n premiers termes d'une suite géométrique.

i. Séries numériques
Série convergente, divergente. Série absolument convergente.
Somme d'une série convergente. Sommes partielles, reste d'une intégrale convergente.
Séries de référence : séries géométriques, séries de Riemann, série exponentielle.
Critères d'équivalence, de comparaison et de négligeabilité.
Les séries de Bertrand ne sont pas au programme.
Calcul de sommes de séries : séries de termes généraux q^n, nq^{n-1}, $n(n-1)q^{n-2}$, $a^n/n!$; procédé de télescopage (séries de terme général $u_n = v_n - v_{n+1}$).

j. Fonctions de plusieurs variables
Continuité, dérivées partielles premières et secondes.
Théorème de Schwarz.
Dans les exercices, on se limitera à des fonctions admettant des dérivées partielles secondes continues sur leur domaine de définition.
Condition du premier ordre (nécessaire) pour l'existence d'un extremum local libre, points critiques.
En deux variables : condition du deuxième ordre (suffisante) pour l'existence d'un extremum local.

4. Probabilités
a. Notions élémentaires
Langage des probabilités. Événements, probabilités, propriétés élémentaires.
Notion de système complet d'événements (fini ou infini).
La formule de Poincaré ou du crible n'est pas au programme.
Probabilités conditionnelles. Théorème des probabilités totales, formule de Bayes.
Événements indépendants deux à deux, événements mutuellement indépendants.

b. Variables aléatoires prenant des valeurs entières
Définition, propriétés. Propriétés et calcul de l'espérance et de la variance, formule de Koenig-Huygens.
Loi conditionnée par un événement. La notion d'espérance conditionnelle n'est pas au programme.
Lois usuelles : constante ou de Dirac, uniforme, de Bernoulli, binomiale, hypergéométrique, géométrique, de Poisson. Valeurs de leurs espérances et de leurs variances.
Fonction de variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$: définition, loi, théorème de transfert.

c. Couples et n-uplets de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$
Loi conjointe, lois marginales, lois conditionnées, relations entre ces lois.
Covariance et coefficient de corrélation linéaire : existence, calcul, propriétés. Cas où le coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires est égal à +1 ou –1.
Formule pour la variance d'une somme de n variables aléatoires faisant intervenir les covariances.
Variables aléatoires deux à deux indépendantes, mutuellement indépendantes.
Propriétés. Variance d'une somme et espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes.
Somme de n variables aléatoires indépendantes suivant une loi binomiale de même 2ème paramètre p.
Somme de n variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson.

d. Variables aléatoire à densité
Définition d'une densité. Propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
Espérance, variance, calcul pratique (formule de Koenig-Huygens).
Lois usuelles : uniforme, exponentielle, normale, leurs espérances et leurs variances.
Fonction de variable aléatoire à densité : méthode de détermination de la densité, théorème du transfert pour le calcul de l'espérance.

e. Convergences
Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
Définition de la convergence en probabilité, de la convergence en loi. Loi faible des grands nombres.
Caractérisation de la convergence en loi pour des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Convergence d'une suite de variables aléatoires suivant une loi binomiale vers une variable aléatoire suivant une loi de Poisson ou une loi normale ; convergence d'une suite de variables aléatoires suivant une loi de Poisson vers une variable aléatoire suivant une loi normale.
Théorème de la limite centrée.

f. Estimation
Estimation ponctuelle : biais, estimateur sans biais, risque quadratique, estimateur convergent.
Estimation par intervalle de confiance.