
BIENVENUE DANS NOS RESEAUX D'ENERGIE
Marc-Antoine, étudiant en pré-Master
Avec 250 entreprises partenaires, 27 000 anciens diplômés présents dans 121 pays, un maillage unique de professeurs, d'associations, et d'ambassadeurs, le réseau de l'EDHEC est une véritable force sur laquelle vous pourrez compter tout au long de votre cursus et de votre carrière. Venez vous inscrire dans une dimension résolument internationale et découvrir un nouveau monde, celui des réseaux et de l'excellence, qui vous ouvrira d'innombrable portes.
www.edhec-ge.com
EDHEC BUSINESS SCHOOL

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur titre en première année (AST1)

MATHEMATIQUES

14 avril 2011

Durée de l'épreuve : 2 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

On désigne par a un réel strictement positif et on considère la fonction h_a, de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par : $\forall(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $h_a(x, y) = (1 + x + xy + ay^2)\, e^{x+\frac{1}{a}}$.

1) Montrer que h_a possède deux points critiques (c'est-à-dire deux couples de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ en lesquels h_a est susceptible de présenter un extremum local).

2) a) Montrer que h_a présente un seul extremum local sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et préciser la nature de cet extremum.

b) On note $m(a)$ la valeur de l'extremum local de h_a. Vérifier que : $m(a) = -\dfrac{1+a}{a} e^{-2+\frac{1}{a}}$.

3) On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} e^2 m(x) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

a) Montrer que f est continue à gauche en 0.
b) Montrer que f est dérivable à gauche en 0 et déterminer $f_g'(0)$.
c) Dresser le tableau de variation de f, limites comprises.

4) On note maintenant g la fonction définie par : $g(x) = \begin{cases} e\, f(-\frac{1}{x}) \text{ si } x \geq 1 \\ 0 \text{ si } x < 1 \end{cases}$.

a) Rappeler sans calcul, en se référant à une loi exponentielle, la valeur de $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$.
b) En déduire que g est une densité d'une certaine variable aléatoire X.
c) Donner la valeur de l'espérance de X.

Exercice 2

On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on rappelle que la famille $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on note φ l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe la matrice $\varphi(M) = A\,M - M\,A$.

1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2) Déterminer la matrice Φ de φ dans la base $\mathcal{B}$.
3) En déduire $\mathrm{Ker}\varphi$ et $\mathrm{Im}\varphi$.
4) a) Montrer que $\mathrm{Ker}\varphi \cap \mathrm{Im}\varphi = \{0\}$.
   b) Vérifier que la matrice I appartient à $\mathrm{Ker}\varphi$.
   c) Établir alors qu'il n'existe aucune matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(M) = I$.
5) On considère les matrices $K_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $K_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
   a) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (A, K_1, K_2, K_3)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   b) Écrire la matrice Φ' de φ dans la base $\mathcal{B}'$ et en déduire que φ est diagonalisable.

Exercice 3

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.

Un pion se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

• Au départ, le pion est sur le sommet 1.

• Lorsque le pion est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le pion à l'instant n. D'après le premier des deux points précédents, on a donc $X_0 = 1$.

1) a) Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :
$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3} P(X_n = 2) + \frac{1}{3} P(X_n = 3) + \frac{1}{3} P(X_n = 4).$$
   b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $P(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3} P(X_n = 1) + \frac{1}{3}$.
   c) Donner alors, pour tout entier naturel n, la valeur de $P(X_n = 1)$.
2) a) En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $P(X_n = 2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

On admet, que, pour tout entier naturel n, on a aussi : $P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

3) Déterminer l'espérance, notée $E(X_n)$, de la variable aléatoire X_n.
4) Étudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EDHEC 2011 : concours AST1

Corrigé de l'épreuve de mathématiques

Exercice 1..

1) La fonction h_a est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, en tant que produit d'une fonction polynomiale et d'une fonction exponentielle. Les dérivées partielles premières sont :

$\dfrac{\partial h_a}{\partial x}(x,y) = (2+x+y+xy+ay^2)e^{x+\frac{1}{a}}$ et $\dfrac{\partial h_a}{\partial y}(x,y) = (x+2ay)e^{x+\frac{1}{a}}$.

Les points critiques de h_a sont les couples (x,y) de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ en lesquels les dérivées partielles premières s'annulent simultanément. Comme $e^{x+\frac{1}{a}}$ est différent de 0, on résout donc :

$\begin{cases} 2+x+y+xy+ay^2=0 \\ x+2ay=0 \end{cases}$, ce qui équivaut à : $\begin{cases} 2+(1-2a)y-ay^2=0 \\ x=-2ay \end{cases}$, soit : $\begin{cases} ay^2+(2a-1)y-2=0 \\ x=-2ay \end{cases}$.

Le discriminant de l'équation du second degré ($a \neq 0$) $ay^2+(2a-1)y-2=0$ est égal à $(2a+1)^2$ et les deux solutions sont : $y = -2$ et $y = \dfrac{1}{a}$.

Pour $y = -2$, on obtient $x = 4a$ et pour $y = \dfrac{1}{a}$, on obtient $x = -2$.

Les deux points critiques sont donc : $A = (4a, -2)$ et $B = (-2, \dfrac{1}{a})$.

2) a) On calcule les dérivées partielles secondes (h_a est bien sûr de classe C^2 pour les mêmes raisons que plus haut) :

$\dfrac{\partial^2 h_a}{\partial x^2}(x,y) = (3+x+2y+xy+ay^2)e^{x+\frac{1}{a}}$.

$\dfrac{\partial^2 h_a}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 h_a}{\partial y \partial x}(x,y) = (1+x+2ay)e^{x+\frac{1}{a}}$.

$\dfrac{\partial^2 h_a}{\partial y^2}(x,y) = 2ae^{x+\frac{1}{a}}$.

Au point A, on trouve : $r = -e^{4a+\frac{1}{a}}$, $s = e^{4a+\frac{1}{a}}$ et $t = 2ae^{4a+\frac{1}{a}}$. On a donc : $rt-s^2 = (-2a-1)\,e^{8a+\frac{2}{a}}$.
Comme $rt-s^2 < 0$ ($a > 0$), le point A n'est pas un extremum de h_a.

Au point B, on trouve : $r = (1+\dfrac{1}{a})e^{-2+\frac{1}{a}}$, $s = e^{-2+\frac{1}{a}}$ et $t = 2ae^{-2+\frac{1}{a}}$. On a donc : $rt-s^2 = (2a+1)\,e^{-4+\frac{2}{a}}$.

Comme $rt-s^2 > 0$, h_a présente un extremum local au point B.
De plus r est positif donc cet extremum local est un minimum local.

b) Le minimum de h_a est le réel $m(a) = h_a(-2, \dfrac{1}{a}) = (1-2-\dfrac{2}{a}+a\dfrac{1}{a^2})e^{-2+\frac{1}{a}}$.

On a bien : $m(a) = (-1-\dfrac{1}{a})e^{-2+\frac{1}{a}} = -\dfrac{1+a}{a}e^{-2+\frac{1}{a}}$.

3) a) On a, pour tout x différent de 0 : $f(x) = -\dfrac{1+x}{x}e^{\frac{1}{x}} = -\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}}$

On a alors : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(-\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}}\right) = \lim\limits_{u\to -\infty} (-ue^u - e^u) = 0$ (limites usuelles).

Comme $f(0) = 0$, on a : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$. Ceci prouve que :

$$\boxed{f \text{ est continue à gauche en } 0.}$$

b) Pour tout réel $x < 0$, on a : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} - \dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$.

On a alors : $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} - \dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\right) = \lim\limits_{u\to -\infty} (-u^2e^u - ue^u) = 0$ (limites usuelles). Ceci prouve que :

$$\boxed{f \text{ est dérivable à gauche en } 0 \text{ et : } f_g'(0) = 0.}$$

c) Après calculs, on trouve : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \dfrac{1+2x}{x^3}\exp\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1+2x}{x} \times \dfrac{1}{x^2}\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

On en déduit que $f'(x)$ est du signe de $\dfrac{1+2x}{x}$ (strictement positif sur $]-\infty, -\dfrac{1}{2}[$, strictement négatif sur $]-\dfrac{1}{2}, 0[$ et strictement positif sur $]0, +\infty[$, ce qui permet d'affirmer que :

La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty, -\dfrac{1}{2}[$, strictement décroissante sur $]-\dfrac{1}{2}, 0[$ et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} -\dfrac{1+x}{x}e^{\frac{1}{x}} = -1$ (car $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1+x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{u\to 0} e^u = 1$).

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} -\dfrac{1+x}{x}e^{\frac{1}{x}} = -1$ (car $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1+x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{u\to 0} e^u = 1$).

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(-\dfrac{1+x}{x}e^{\frac{1}{x}}\right) = -\infty$ (pas d'indétermination).

Pour finir : $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -e^{-2} = -\dfrac{1}{e^2}$.

On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-1/2$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	0 ||	$+$	
$f_n(x)$	-1	↗	$-1/e^2$	↘	0 || $-\infty$	↗	-1

4) a) Si on note Z une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, alors son espérance est $E(Z) = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$ et on sait qu'elle est égale à 1.

On a donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1.}$$

b) Pour tout x supérieur ou égal à 1, on trouve : $g(x) = (x-1)e^{-x}$.

La fonction g est positive (nulle sur $]-\infty, 1[$ et positive sur $[1, +\infty[$, puisque $x \geq 1$ et $e^{-x} > 0$).
La fonction g est continue (nulle sur $]-\infty, 1[$ et produit de fonctions continues sur $[1, +\infty[$).
D'après la première question, l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$ converge et vaut 1. En effectuant dans cette intégrale le changement de variable $t = x+1$ (affine donc autorisé), on obtient :
$\int_1^{+\infty} e(t-1)e^{-t} dt = 1$. On a donc : $\int_1^{+\infty} g(t)\, dt = 1$.

Comme g est nulle sur $]-\infty, 1[$,on a $\int_{-\infty}^{1} g(t)\, dt = 0$.

Grâce à la relation de Chasles, on obtient : $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, dt = 1$.

En conclusion, g est une densité de probabilité.

c) Pour tout t supérieur ou égal à 1, $(t-1)\ g(t) = e\ (t-1)^2\, e^{-t}$.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$ converge et vaut 2 (moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1) et le changement de variable $t = x+1$ fournit :
$\int_1^{+\infty} (t-1)\, g(t)\, dt = 2$.

Comme g est nulle sur $]-\infty, 1[$,on a $\int_{-\infty}^{1} (t-1)\, g(t)\, dt = 0$.

Grâce à la relation de Chasles, on obtient $E(X-1) = 2$, d'où l'on tire : $E(X) = 3$.

Exercice 2...

1) Pour montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il faut montrer que φ est linéaire et que, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\varphi(M)$ appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
• Soit λ un réel et M et M' deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :
$\varphi(M + \lambda M') = A(M + \lambda M') - (M + \lambda M')A = AM + \lambda AM' - (MA + \lambda M'A)$.
$\varphi(M + \lambda M') = AM + \lambda AM' - MA - \lambda M'A = AM - MA + \lambda(AM' - M'A) = \varphi(M) + \lambda\varphi(M')$.
L'application φ est linéaire.
• Si M est élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors, comme A appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, les produits AM et MA sont éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et leur différence aussi.
Conclusion :

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

2) $\varphi(E_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -E_2 + E_3$.

$$\varphi(E_2) = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix} = -E_1 + E_4.$$

$$\varphi(E_3) = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} = E_1 - E_4.$$

$$\varphi(E_4) = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} = E_2 - E_3.$$

Par définition, la matrice de φ relativement à la base $\mathcal{B}$ est : $\Phi = \begin{pmatrix}0&-1&1&0\\-1&0&0&1\\1&0&0&-1\\0&1&-1&0\end{pmatrix}$.

3) Pour déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$, on résout $\Phi X = 0$, avec $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$.

On obtient : $\begin{cases}-y+z=0\\-x+t=0\\x-t=0\\y-z=0\end{cases}$, ce qui se réduit à : $\begin{cases}z=y\\t=x\end{cases}$.

On a donc : $\Phi X = 0 \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix}x\\y\\y\\x\end{pmatrix} \Leftrightarrow X = x\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$.

On conclut : $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{vect}(E_1 + E_4, E_2 + E_3)$.

La famille $(E_1 + E_4, E_2 + E_3)$ est libre, car constituée de deux matrices non proportionnelles, donc :

$$\boxed{(E_1 + E_4, E_2 + E_3) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}\varphi.}$$

D'après le théorème du rang, on sait que $\dim \operatorname{Im}\varphi = 4 - 2 = 2$.

D'autre part, $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{vect}(\ \varphi(E_1), \varphi(E_2), \varphi(E_3), \varphi(E_4)\ )$ et, d'après la question 2), on trouve :

$\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{vect}(E_1 - E_4, E_2 - E_3)$.

$\operatorname{Im}\varphi$ est de dimension 2 et la famille $(E_1 - E_4, E_2 - E_3)$. est une famille génératrice de $\operatorname{Im}\varphi$ donc :

$$\boxed{(E_1 - E_4, E_2 - E_3) \text{ est une base de } \operatorname{Im}\varphi.}$$

4) a) Soit M une matrice élément de $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi$, alors :

• comme M appartient $\operatorname{Ker}\varphi$, il existe deux réels a et b tels que :

$M = a(E_1 + E_4) + b(E_2 + E_3) = aE_1 + aE_4 + bE_2 + bE_3$.

• comme M appartient $\operatorname{Im}\varphi$, il existe deux réels c et d tels que :

$M = c(E_1 - E_4) + d(E_2 - E_3) = cE_1 - cE_4 + dE_2 - dE_3$.

En égalant les deux expressions de M, on a : $aE_1 + aE_4 + bE_2 + bE_3 = cE_1 - cE_4 + dE_2 - dE_3$.

En arrangeant, on obtient : $(a-c)E_1 + (b-d)E_2 + (b+d)E_3 + (a+c)E_4 = 0$.

Comme (E_1, E_2, E_3, E_4) est libre, on trouve : $\begin{cases} a=c \\ a=-c \\ b=d \\ b=-d \end{cases}$. Ceci se réduit à : $a=b=c=d=0$.

Conclusion :

$$\boxed{\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi = \{0\}.}$$

b) On a $\varphi(I) = AI - IA = A - A = 0$.
On a donc (par définition du noyau) :

$$\boxed{I \in \operatorname{Ker}\varphi.}$$

c) S'il existait une matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(M) = I$, alors, par définition de $\operatorname{Im}\varphi$, on aurait : $I \in \operatorname{Im}\varphi$.
Avec le résultat de la question 4b), on aurait montré que I appartient à $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi$, ce qui est impossible puisque $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi = \{0\}$.
En conclusion :

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de matrice } M \text{ de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telle que } \varphi(M) = I.}$$

5) a) Soit a, a_1, a_2, a_3 quatre réels tels que $a\,A + a_1 K_1 + a_2 K_2 + a_3 K_3 = 0$.
Cette égalité s'écrit : $a\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

On obtient le système : $\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ a-b+c-d=0 \\ a-b-c+d=0 \\ a+b-c-d=0 \end{cases}$.

Avec les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 + L_3$, on a : $\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ a+c=0 \\ a-b-c+d=0 \\ a-c=0 \end{cases}$.

Les équations (2) et (4) donnent $a = c = 0$ et en remplaçant dans les équations (1) et (3), on trouve : $b = d = 0$.
On peut ainsi conclure que la famille (A, K_1, K_2, K_3) est une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Comme $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$ et comme cette famille contient 4 matrices, on peut conclure :

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{B}' = (A, K_1, K_2, K_3) \text{ est une base de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

b) On a : $\varphi(A) = A^2 - A^2 = 0$.

$$\varphi(K_1) = AK_1 - K_1A = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} = 0.$$

$$\varphi(K_2) = AK_2 - K_2A = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix} = -2\,K_2.$$

$$\varphi(K_3) = AK_3 - K_3A = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&-2\\2&-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} = 2\,K_3.$$

Par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base, la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice Φ' est diagonale donc :

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } \varphi \text{ est diagonalisable.}}$$

Exercice 3..

1) a) $\{(X_n = 1), (X_n = 2), (X_n = 3), (X_n = 4)\}$ est un système complet d'événements puisque le pion est à chaque instant sur l'un seulement des quatre sommets. La formule des probabilités totales donne, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 1)\, P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 2)\, P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 3)\, P_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 4)\, P_{(X_n=4)}(X_{n+1} = 1).$$

D'après la règle du jeu, le pion ne "stationne " pas (donc $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = 0$) et se déplace *de façon équiprobable* sur l'un des autres sommets (donc, pour tout i différent de 1, $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}$).

On peut donc conclure :

$$\boxed{P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3} P(X_n = 2) + \frac{1}{3} P(X_n = 3) + \frac{1}{3} P(X_n = 4).}$$

b) L'égalité précédente s'écrit : $P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}\big(P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)\big)$.

Par définition d'un système complet d'événements, on a :
$P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1 - P(X_n = 1)$.

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}(1 - P(X_n = 1))$.

On a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3} P(X_n = 1) + \frac{1}{3}.}$$

c) Si l'on pose $u_n = P(X_n = 1)$, la suite (u_n) est arithmético-géométrique et d'après le cours, on sait que la suite $(u_n - \frac{1}{4})$ est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ (et de premier terme $u_0 = P(X_0 = 1) = 1$ puisque le pion est sur le sommet 1 au départ), on a donc : $u_n - \frac{1}{4} = (-\frac{1}{3})^n (u_0 - \frac{1}{4}) = \frac{3}{4}(-\frac{1}{3})^n$.

Pour finir :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P(X_n = 1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(-\frac{1}{3})^n.}$$

2) Avec le même système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$P(X_{n+1} = 2) = P(X_n = 1)\, P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) + P(X_n = 2)\, P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) + P(X_n = 3)\, P_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 2) + P(X_n = 4)\, P_{(X_n=4)}(X_{n+1} = 2).$$

Pour les mêmes raisons qu'à la question précédente, on a :

$$P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}P(X_n = 3) + \frac{1}{3}P(X_n = 4).$$

Comme $P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1 - P(X_n = 2)$, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}(1 - P(X_n = 2)) = -\frac{1}{3}P(X_n = 2) + \frac{1}{3}.$$

Si l'on pose $v_n = P(X_n = 2)$, la suite (v_n) est arithmético-géométrique et toujours d'après le cours, on sait que la suite $(v_n - \frac{1}{4})$ est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ (et cette fois de premier terme $v_0 = 0$ puisque le pion est sur le sommet 1 au départ), on a donc : $v_n - \frac{1}{4} = (-\frac{1}{3})^n (v_0 - \frac{1}{4}) = -\frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^n$.

En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P(X_n = 2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.}$$

3) Par définition, l'espérance de X_n est : $E(X_n) = P(X_n = 1) + 2P(X_n = 2) + 3P(X_n = 3) + 4P(X_n = 4)$.
En remplaçant, on obtient :

$$E(X_n) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(-\frac{1}{3})^n + 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) + 3\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) + 4\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right).$$

$$E(X_n) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(-\frac{1}{3})^n + 9\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right).$$

On a donc :

$$\boxed{E(X_n) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.}$$

4) Comme $-1 < -\frac{1}{3} < 1$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$, ce qui implique :

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 1) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n = 2) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n = 3) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n = 4) = \frac{1}{4}.$$

La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[\![1, 4]\!]$.

EDHEC 2011

Concours d'admission sur titre en première année

RAPPORT DU JURY
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Présentation de l'épreuve.
L'épreuve comportait trois exercices ce qui permettait de juger les candidats sur la totalité du programme de l'épreuve. Les correcteurs ont trouvé le sujet abordable, adapté et sélectif. Ils regrettent que nombre de candidats ne soient que très insuffisamment préparés, notamment en probabilités.

• L'exercice 1 proposait l'étude de la fonction de deux variables h_a définie par :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $h_a(x, y) = (1 + x + xy + ay^2)\, e^{x+\frac{1}{a}}$.

Cette fonction présente un minimum local $m(a)$, ce qui permet d'enchaîner sur l'étude d'une fonction f d'une seule variable définie par $f(x) = e^2 m(x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. La fin consistait à chercher l'espérance d'une variable aléatoire dont une densité est construite à partir de la fonction f.

• L'exercice 2 se fixait pour but d'étudier l'endomorphisme φ qui à toute matrice M, élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe $\varphi(M) = AM - MA$, où A est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$: recherche du noyau, de l'image, puis diagonalisation de φ.

• L'exercice 3 portant sur le programme de probabilités, avait pour objectif l'étude d'une chaîne de Markov à quatre états, puis le calcul de l'espérance de la variable aléatoire X_n associé à cette chaîne, et enfin de montrer la convergence en loi de la suite (X_n) vers une variable suivant une loi uniforme.

Moyenne .
Pour les 871 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est de 9,5 sur 20.
Il est à noter que plus de 15% des candidats obtiennent une note inférieure ou égale à 4.

Analyse des copies.
Les correcteurs constatent une fois encore que le niveau est très hétérogène, ceci étant, bien sûr, dû aux origines scolaires et universitaires diverses des candidats. La moyenne, plus faible que l'année dernière, pourrait être due à la présence de 145 candidats supplémentaires, pas forcément tous conscients de la difficulté d'une telle épreuve.
Mis à part, d'un côté quelques très brillants candidats et de l'autre, un certain nombre de candidats très mal préparés, d'assez nombreux candidats semblent s'être "spécialisés" (soit en analyse, soit en algèbre, soit en probabilités), ce qui n'est pas la meilleure façon de préparer ce genre d'épreuve. Rappelons de plus que ces trois "compartiments" du programme de mathématiques sont essentiels pour une bonne continuation des études à l'EDHEC.

En ce qui concerne la crédibilité des copies, signalons les quelques points suivants :
• La résolution d'un système de 4 équations à 4 inconnues ne se fait pas en se contentant d'affirmer qu'il est évident que la solution est "ce qu'elle doit être", alors qu'il est nécessaire de procéder à quelques opérations élémentaires sur les lignes du système avant de commencer à y voir clair !
• Les calculs de limites doivent être très précis et justifiés d'une façon rigoureuse : la locution "croissances comparées" ne devant pas être utilisée à tort et à travers et servir de sésame systématique pour trouver la bonne limite.
• Il est très dommageable de se tromper dans un calcul de dérivée, puis d'être obligé de modifier certaines limites afin que le tableau de variation soit cohérent : s'il y a un point à soigner (et ceci sans avoir trop d'efforts à fournir), c'est bien le calcul des dérivées.
• Pour finir, l'énoncé demandant de se référer à une loi exponentielle pour donner, **sans calcul**, la valeur de $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$, il n'est pas question de procéder à une intégration par parties, et pas question non plus de citer la fonction Gamma. Se contenter d'écrire que "grâce à la loi exponentielle, cette intégrale vaut 1" ne contentait pas les correcteurs qui attendaient que l'on cite l'espérance ainsi que le paramètre de la dite loi exponentielle.

Conclusion.
Le niveau global des candidats est relativement décevant, mais le sujet a très certainement permis de repérer et de mettre en valeur les candidats les mieux préparés (il y en a d'excellents) et les plus aptes à trouver leur place dans des études exigeantes et nécessitant rigueur et honnêteté intellectuelle.
Nous conseillons aux futurs candidats de se préparer d’une façon plus complète, en essayant de ne négliger aucun des points du programme.