
BIENVENUE
DANS NOS
RESEAUX
D'ENERGIE
Avec 250 entreprises partenaires, 27 000 anciens diplômés présents dans 121 pays, un maillage unique de professeurs, d'associations, et d'ambassadeurs, le réseau de l'EDHEC est une véritable force sur laquelle vous pourrez compter tout au long de votre cursus et de votre carrière. Venez vous inscrire dans une dimension résolument internationale et découvrir un nouveau monde, celui des réseaux et de l'excellence, qui vous ouvrira d'innombrable portes.
www.edhec-ge.com
Marc-Antoine,
étudiant en pré-Master
EDHEC
BUSINESS SCHOOL

Concours **EDHEC** **3 Avril 2009**
Admission sur Titres 1ère année

MATHEMATIQUES

Durée de l'épreuve : 2 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n non nul : $u_n = \sqrt{n^2 + u_{n-1}}$.

1) a) Montrer que chaque terme de cette suite est bien défini et positif ou nul.
   b) Calculer u_1 et u_2.
   c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2) a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n \leq 2n$.
   b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \leq u_n \leq n + 1$.
   c) Conclure alors que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} n$.

3) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_n - n = \dfrac{u_{n-1}}{u_n + n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - n)$.

Exercice 2

1) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4x \end{pmatrix}$, où x désigne un nombre réel.
   a) Montrer que A est diagonalisable si seulement si A possède 2 valeurs propres distinctes.
   b) Écrire l'équation vérifiée par les valeurs propres λ de la matrice A.
   c) En déduire que A est diagonalisable si et seulement si $x^2 > \dfrac{1}{4}$.

2) Dans la suite, X est une variable aléatoire réelle, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et qui suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

a) On admet que X^2 est une variable aléatoire à densité. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X^2.

b) En déduire que la probabilité que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable est égale à $\frac{1}{2}$.

Exercice 3

Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0,1[$.

1) Dans cette question, λ est un réel strictement positif. On considère deux variables aléatoires discrètes X et Y, définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, telles que X suit la loi de Poisson de paramètre λp et Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$.

a) Donner la loi de la variable aléatoire $X+Y$.

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi de X conditionnellement à l'événement $(X+Y=n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, c'est-à-dire que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P_{(X+Y=n)}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

2) Dans cette question, on étudie la réciproque de la question précédente. On considère donc deux variables aléatoires discrètes X et Y, définies sur le même espace probabilisé, à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes, telles que, pour tout entier naturel n, on a $P(X+Y=n) \neq 0$, et qui vérifient la relation suivante, valable pour tout entier naturel n :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ P_{(X+Y=n)}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = \frac{n!P(X=n)}{p^n},\ v_n = \frac{n!P(Y=n)}{(1-p)^n},\ w_n = n!\ P(X+Y=n).$$

a) Montrer que pour tout couple (k,n) d'entiers naturels tels que $k \leq n$, on a la relation suivante :

$$u_k\, v_{n-k} = w_n. \qquad (R)$$

b) Utiliser la relation (R) avec deux valeurs de k bien choisies pour justifier que

(i) $v_0 \neq 0$.

(ii) La suite (u_n) est géométrique de raison $\lambda = \frac{v_1}{v_0}$.

c) Montrer également que la suite (v_n) est géométrique et que sa raison est aussi égale à λ.

d) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = u_0 \frac{(\lambda p)^k}{k!}$.

e) Utiliser le fait que X est une variable aléatoire pour conclure que X suit la loi de Poisson de paramètre λp.

On montrerait de la même façon, mais ce n'est pas demandé, que Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$.

EDHEC 2009 : concours AST1

Corrigé de l'épreuve de mathématiques

Exercice 1 ....

1) a) Par récurrence.
u_0 est défini par l'énoncé et $u_0 = 0 \geq 0$.
Si l'on suppose pour un entier naturel n fixé supérieur ou égal à 1, que u_{n-1} est défini et positif ou nul, alors $n^2 + u_{n-1}$ est positif, ce qui prouve que u_n est défini puisque la racine carrée de $n^2 + u_{n-1}$ existe. Comme, de plus, une racine carrée est positive, on a aussi $u_n \geq 0$.
On a bien montré par récurrence que chaque terme de la suite (u_n) est parfaitement défini et positif ou nul.

b) On a : $u_1 = \sqrt{1^2 + u_0} = 1$ et $u_2 = \sqrt{2^2 + u_1} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.

c) Comme $u_{n-1} \geq 0$, on a, pour tout $n \geq 1$, $n^2 + u_{n-1} \geq n^2$, d'où, par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, $u_n \geq n$ (ceci étant vrai également pour $n = 0$).
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.}$$

2) a) Par récurrence.
$u_0 = 0$ donc $u_0 \leq 2\times 0$.
Supposons pour un entier naturel n fixé supérieur ou égal à 1, que $u_{n-1} \leq 2n - 2$.

On peut écrire : $2n - u_n = 2n - \sqrt{n^2 + u_{n-1}} = 2n - \sqrt{n^2 + u_{n-1}} \times \dfrac{2n + \sqrt{n^2 + u_{n-1}}}{2n + \sqrt{n^2 + u_{n-1}}}$.

$2n - u_n = \dfrac{4n^2 - n^2 - u_{n-1}}{2n + \sqrt{n^2 + u_{n-1}}} = \dfrac{3n^2 - u_{n-1}}{2n + \sqrt{n^2 + u_{n-1}}}$. Grâce à l'hypothèse de récurrence, on a donc :

$2n - u_n \geq \dfrac{3n^2 - 2n + 2}{2n + \sqrt{n^2 + u_{n-1}}}$.

Le dénominateur est strictement positif et le numérateur l'est aussi puisque son discriminant est strictement négatif ($\Delta = -20$). On peut conclure : $2n \geq u_n$.
On a bien montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 2n.}$$

b) On en déduit que : $\forall n \geq 1$, $u_n = \sqrt{n^2 + u_{n-1}} \leq \sqrt{n^2 + 2n - 2} \leq \sqrt{n^2 + 2n + 1}$.
Ceci montre que : $u_n \leq (n + 1)$.
On savait déjà que $n \leq u_n$, on a donc : $\forall n \geq 1$, $n \leq u_n \leq n + 1$.

Ceci étant valable pour $n = 0$, peut conclure :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n \leq u_n \leq n+1.}$$

c) Pour tout n supérieur ou égal à 1, on peut diviser l'encadrement précédent par n et on obtient : $1 \leq \frac{u_n}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$, le théorème d'encadrement permet d'affirmer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.

Ceci prouve que :

$$\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} n.}$$

3) L'encadrement de la question 2b) n'est pas suffisant pour conclure.

On remarque que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n^2 - n^2 = u_{n-1}$, d'où : $(u_n - n)(u_n + n) = u_{n-1}$.

On a donc : $u_n - n = \dfrac{u_{n-1}}{u_n + n} = \dfrac{u_{n-1}}{u_n} \times \dfrac{1}{1+\dfrac{n}{u_n}}$.

D'après la question 2c), on a : $\dfrac{u_{n-1}}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n-1}{n}$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n-1}}{u_n} = 1$.

D'autre part, toujours grâce à 2c) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{u_n} = 1$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{n}{u_n}} = \dfrac{1}{2}$.

Au final, on trouve :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (u_n - n) = \frac{1}{2}.}$$

Exercice 2 ....

1) a) Il y a trois cas à envisager :

Si A n'a aucune valeur propre, elle n'est évidemment pas diagonalisable.

Si A n'a qu'une valeur propre λ et si A était diagonalisable, alors il existerait une matrice P inversible telle que $A = P\lambda IP^{-1} = \lambda I$. Comme A n'est pas scalaire, ceci est inenvisageable.

Si A possède 2 valeurs propres, on sait que A est diagonalisable (condition suffisante : 2 valeurs propres distinctes pour une matrice d'ordre 2).

On peut conclure :

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable si seulement si } A \text{ possède 2 valeurs propres distinctes.}}$$

b) Les valeurs propres de A sont les réels λ pour lesquels $(A-\lambda I)$ n'est pas inversible.

$A-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & 4x-\lambda \end{pmatrix}$. Avec l'opération $L_1 \leftrightarrow L_2$, on obtient :

$\begin{pmatrix} 1 & 4x-\lambda \\ -\lambda & -1 \end{pmatrix}$. Maintenant, on fait l'opération $L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1$:

$\begin{pmatrix} 1 & 4x-\lambda \\ 0 & -\lambda^2 + 4x\lambda - 1 \end{pmatrix}$

La réduite de Gauss ci-dessus étant triangulaire, elle n'est pas inversible si et seulement si $-\lambda^2+4x\lambda-1=0$, soit $\lambda^2-4x\lambda+1=0$

Les valeurs propres de A sont les réels λ solutions de $\lambda^2-4x\lambda+1=0$.

c) D'après la question 1a), on en déduit que A est diagonalisable si et seulement si l'équation $\lambda^2-4x\lambda+1=0$ possède 2 solutions distinctes, c'est-à-dire si et seulement si son discriminant ($\Delta=16x^2-4$) est strictement positif.

A est diagonalisable si seulement si $x^2>\dfrac{1}{4}$.

2) a) Comme $X(\Omega)=[0,1]$, alors $X^2(\Omega)=[0,1]$.
$\forall x\in[0,1]$, $(X^2\leq x)=(-\sqrt{x}\leq X\leq\sqrt{x})$.
En notant F_{X^2} la fonction de répartition de X^2, on a :
$\forall x\in[0,1]$, $F_{X^2}(x)=F_X(\sqrt{x})-F_X(-\sqrt{x})=F_X(\sqrt{x})$, car $-\sqrt{x}\leq 0$.
De plus, on sait que, pour tout x de $[0,1]$, on a $F_X(x)=x$, par conséquent :
$\forall x\in[0,1]$, $F_{X^2}(x)=\sqrt{x}$.
On a donc :

$$\boxed{F_{X^2}(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\ \sqrt{x} \text{ si } x\in[0,1]\\ 1 \text{ si } x>1\end{cases}.}$$

b) D'après la question 1b), la probabilité que M soit diagonalisable est égale à $P(X^2>\frac{1}{4})$, soit :

$$P(X^2>\frac{1}{4})=1-F_{X^2}(\frac{1}{4})=1-\sqrt{\frac{1}{4}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

La probabilité que M soit diagonalisable est égale à $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 3 ....

1) a) Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes et suivent respectivement les lois de Poisson de paramètres λp et $\lambda(1-p)$. D'après le cours, on sait que $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda p+\lambda(1-p)=\lambda$.

$X+Y$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

b) Puisque X et Y prennent des valeurs positives ou nulles alors la variable aléatoire X, sachant que $(X+Y=n)$ est réalisé, prend ses valeurs dans $[\![0,n]\!]$.
$\forall k\in[\![0,n]\!]$, $P_{(X+Y=n)}(X=k)=\dfrac{P(\,[X=k]\cap[X+Y=n]\,)}{P(X+Y=n)}$.
On peut alors écrire $P_{(X+Y=n)}(X=k)=\dfrac{P(\,[X=k]\cap[Y=n-k]\,)}{P(X+Y=n)}$.

Comme X et Y sont indépendantes, on a :

$$P_{(X+Y=n)}(X=k) = \frac{P(X=k)\,P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)}.$$

On connaît les lois de X, Y et $X+Y$, ce qui permet d'obtenir :

$$P_{(X+Y=n)}(X=k) = \frac{\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}\,\frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda(1-p)}}{\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}}.$$

Comme $e^{-\lambda p}e^{-\lambda(1-p)} = e^{-\lambda}$ et comme $(\lambda p)^k(\lambda(1-p))^{n-k} = \lambda^n p^k(1-p)^{n-k}$, on a :
$P_{(X+Y=n)}(X=k) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}\,p^k(1-p)^{n-k}$. On peut alors conclure :

$$\boxed{\forall k\in[\![0, n]\!],\ P_{(X+Y=n)}(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.}$$

2) a) $\forall k\in[\![0, n]\!],\ u_k v_{n-k} = \dfrac{k!P(X=k)}{p^k}\ \dfrac{(n-k)!P(Y=n-k)}{(1-p)^{n-k}}$

Comme X et Y sont indépendantes, on a :

$$u_k v_{n-k} = \frac{k!(n-k)!P(\,[X=k]\cap[Y=n-k]\,)}{p^k(1-p)^{n-k}}$$

$$u_k v_{n-k} = \frac{k!(n-k)!P(\,[X=k]\cap[X+Y=n]\,)}{p^k(1-p)^{n-k}}$$

$$u_k v_{n-k} = \frac{k!(n-k)!}{p^k(1-p)^{n-k}}P_{(X+Y=n)}(X=k)\,P(X+Y=n).$$

En remplaçant $P_{(X+Y=n)}(X=k)$ par $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, on obtient :

$$u_k v_{n-k} = \frac{k!(n-k)!}{p^k(1-p)^{n-k}}\times\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}P(X+Y=n)$$

En simplifiant, on trouve alors : $u_k v_{n-k} = n!\,P(X+Y=n)$.

$$\boxed{\forall k\in[\![0, n]\!],\ u_k v_{n-k} = w_n \qquad (R)}$$

b) ***(i)*** En appliquant la relation (R) avec $k=n$, on obtient : $u_n v_0 = w_n$.
Comme $w_n = n!\,P(X+Y=n)$, on a, par hypothèse de l'énoncé, $w_n \neq 0$.
Par conséquent :

$$\boxed{v_0 \neq 0.}$$

(ii) En appliquant la même relation avec $k = n-1$ (ceci pour $n \geq 1$), on trouve : $u_{n-1}v_1 = w_n$.
Comme on a vu plus haut que $u_n v_0 = w_n$, on a :
$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n v_0 = u_{n-1}v_1$.

Comme $v_0 \neq 0$, on peut alors écrire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{v_1}{v_0} u_{n-1}$.

Ceci prouve que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } \lambda = \frac{v_1}{v_0}.}$$

c) En appliquant toujours la relation obtenue à la question 2a), mais avec $k = 0$, on obtient : $u_0 v_n = w_n$.
On a $w_n \neq 0$ donc :

$$\boxed{u_0 \neq 0.}$$

En appliquant la même relation, mais avec $k = 1$ (ceci pour $n \geq 1$), on trouve : $u_1 v_{n-1} = w_n$ et comme $u_0 v_n = w_n$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_0 v_n = u_1 v_{n-1}$.

On peut alors écrire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{u_1}{u_0} v_{n-1}$.

Ceci prouve que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{u_1}{u_0}$.

La relation obtenue à la question 2a), écrite pour $n = 1$ et $k = 0$ fournit : $w_1 = u_0 v_1$.
Pour $n = 1$ et $k = 1$, elle donne : $w_1 = u_1 v_0$.

On a donc $u_0 v_1 = u_1 v_0$, d'où l'on déduit : $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{v_1}{v_0}$.

On peut maintenant conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } \lambda.}$$

d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant géométrique de raison λ, on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = u_0 \lambda^k$.

En remplaçant dans la définition de u_k, on trouve : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{k!P(X = k)}{p^k} = u_0 \lambda^k$.

On en déduit que :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = u_0 \frac{(\lambda p)^k}{k!}.}$$

e) Comme X est une variable aléatoire, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$, ce qui donne $u_0 \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda p)^k}{k!} = 1$.

On sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda p)^k}{k!} = e^{\lambda p}$ (série exponentielle), on en déduit donc que $u_0 = e^{-\lambda p}$.

En remplaçant dans l'expression de $P(X = k)$, on obtient : $P(X = k) = \dfrac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}$.

Pour conclure :

$$\boxed{X \text{ suit la loi de Poisson de paramètre } \lambda p.}$$

Concours **EDHEC** **3 Avril 2009**
Admission sur Titres 1ère année

RAPPORT DE CORRECTION

MATHÉMATIQUES

Présentation de l'épreuve :

• L'épreuve comportait trois exercices ce qui permettait de juger les candidats sur la totalité du programme de l'épreuve. Les correcteurs ont trouvé le sujet abordable, adapté et sélectif. Ils regrettent que nombre de candidats ne soient que très insuffisamment préparés, notamment en probabilités (la formule des probabilités composées semble ignorée de trop nombreux candidats ainsi que la façon de déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité).

• L'exercice 1 proposait l'étude de la suite définie par $u_0 = 0$ et, par la relation $u_n = \sqrt{n^2 + u_{n-1}}$, valable pour tout entier n supérieur ou égal à 1

• L'exercice 2, portant à la fois sur le programme d'algèbre et sur le programme de probabilités se fixait pour but de calculer la probabilité qu'une matrice aléatoire $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable, dans le cas où X suit la loi uniforme sur [0, 1].

• L'exercice 3 portant sur le programme de probabilités, avait pour objectif d'établir une caractérisation de la loi de Poisson.

Moyenne :

Pour les 711 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est de 10,10 sur 20.

Analyse des copies :

Les correcteurs constatent une fois encore que le niveau est très hétérogène, ceci étant, bien sûr, dû aux origines scolaires et universitaires diverses des candidats. La moyenne, bien meilleure que celle de l'année dernière, malgré un nombre plus élevé de candidats, semble montrer que ceux qui se présentent connaissent les difficultés mais aussi l'enjeu d'un tel concours.

Cette année encore, les candidats semblent globalement plus à l'aise en analyse et en algèbre
En revanche, les probabilités ont été abordées avec moins de bonheur, de nombreux candidats n'ayant visiblement pas eu le temps de se préparer sur ce thème.
Le jury rappelle que les nombres complexes ne sont pas au programme de cette épreuve.

Conclusion :

Le niveau global des candidats est, dans l'ensemble, correct et il semble que le nombre des candidats très faibles soit en forte diminution, ce qui est bon signe pour les années à venir.
La présentation est, pour la plupart des copies, soignée et honnête et les candidats rédigent proprement, à quelques rares exceptions près.
Nous conseillons aux futurs candidats de se préparer d'une façon plus complète, en essayant de ne négliger aucun des points du programme, notamment les probabilités.