
BIENVENUE DANS NOS RESEAUX D'ENERGIE
Marc-Antoine, étudiant en pré-Master
Avec 250 entreprises partenaires, 27 000 anciens diplômés présents dans 121 pays, un maillage unique de professeurs, d'associations, et d'ambassadeurs, le réseau de l'EDHEC est une véritable force sur laquelle vous pourrez compter tout au long de votre cursus et de votre carrière. Venez vous inscrire dans une dimension résolument internationale et découvrir un nouveau monde, celui des réseaux et de l'excellence, qui vous ouvrira d'innombrable portes.
www.edhec-ge.com
EDHEC BUSINESS SCHOOL

Concours **EDHEC** — 28 Mars 2008

Admission sur Titres 1ère année

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

MATHEMATIQUES

Durée de l'épreuve : 2 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -10 & -5 \end{pmatrix}.$$

1) a) Montrer que A ne possède qu'une seule valeur propre a.
   b) Expliquer pourquoi A n'est pas diagonalisable. A est-elle inversible ?
   c) Déterminer une base du sous-espace propre de A associé à la valeur propre a.

2) I_d désignant l'application identité de $\mathbb{R}^3$, on pose :

$$u_1 = e_1,\ u_2 = (f - a\,I_d)(e_1) \text{ et } u_3 = 2e_1 + e_3.$$

   a) Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et vérifier que u_2 et u_3 sont des vecteurs propres de f.
   b) Ecrire la matrice T de f dans la base $\mathcal{B}'$.
   c) On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Déterminer P^{-1}.
   d) Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer T^n puis en déduire explicitement A^n.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x}\, dx$

1) Vérifier que u_n est bien défini pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer u_1.

2) a) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n(x)\cos(x)\, dx$.

   b) Exprimer $u_{n+2} - u_n$ en fonction de n. En déduire u_3.

3) Étudier les variations de la suite (u_n) et en déduire qu'elle est convergente.

4) a) Déterminer un réel K élément de $]0,1[$ tel que : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{3}]$, $\sin(x) \leq K$.

   b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq u_n \leq \frac{2\pi}{3} K^n$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

5) a) Utiliser la question précédente pour montrer que la série de terme général u_n est convergente.

   b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos x(1-\sin x)} dx - \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^n x}{\cos x(1-\sin x)} dx$.

   c) En déduire que la somme S de la série de terme général u_n est égale à $\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos x(1-\sin x)} dx$.

   d) En effectuant le changement de variable $u = \sin x$, montrer que $S = \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{(1-u)^2(1+u)} du$.

   e) Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$\forall u \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad \frac{1}{(1-u)^2(1+u)} = \frac{a}{1-u} + \frac{b}{1+u} + \frac{c}{(1-u)^2}$$

En déduire la valeur de S.

Exercice 3

On considère une suite de variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n , ... définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = Sup(X_1, X_2, ..., X_n)$ et on admet que S_n est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) a) Déterminer la fonction de répartition F_n de S_n.

   b) En déduire que S_n est une variable aléatoire à densité et vérifier que la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \lambda n e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$ est une densité de S_n.

On pose, pour tout réel x supérieur ou égal à 0 : $I_n(x) = \int_0^x F_n(t)\, dt$ et $J_n(x) = \int_0^x t f_n(t) dt$.

2) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \geq 2$, $F_n(x) = F_{n-1}(x) - \frac{1}{\lambda}\frac{f_n(x)}{n}$.

3) a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \geq 2$, $I_n(x) = I_{n-1}(x) - \frac{1}{\lambda}\frac{F_n(x)}{n}$.

   b) Calculer $I_1(x)$ puis en déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n(x) = x - \frac{1}{\lambda}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{F_k(x)}{k}$.

4) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n(x) = x F_n(x) - I_n(x)$.

   b) Déduire des questions précédentes que S_n possède une espérance et que $E(S_n) = \frac{1}{\lambda}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Concours **EDHEC** Mars 2008
Admission sur Titres 1ère année

Corrigé de l'épreuve de mathématiques

Exercice 1 ....

1) a) Les valeurs propres de A sont les réels λ pour lesquels $(A - \lambda I)$ n'est pas inversible.

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 5 & 2 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & -10 & -5-\lambda \end{pmatrix}$. Avec l'opération $L_1 \leftrightarrow L_3$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & -10 & -5-\lambda \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ -2-\lambda & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, on fait les opérations $L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow 2L_3 + (2+\lambda)L_1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -10 & -5-\lambda \\ 0 & -2-2\lambda & -1-\lambda \\ 0 & -10-10\lambda & -\lambda^2-7\lambda-6 \end{pmatrix}$$

Pour finir, l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2$ donne :

$$\begin{pmatrix} 2 & -10 & -5-\lambda \\ 0 & -2-2\lambda & -1-\lambda \\ 0 & 0 & -(\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$$

La réduite de Gauss ci-dessus étant triangulaire, elle n'est pas inversible si et seulement si $\lambda = -1$.

$\boxed{-1 \text{ est la seule valeur propre de } A}$

Remarque : on pouvait aussi calculer le polynôme caractéristique de A.

b) La matrice A n'a qu'une valeur propre $\lambda = -1$. Si A était diagonalisable, il existerait une matrice P inversible telle que $A = P(-I)P^{-1} = -I$.
Ceci étant visiblement faux, on peut conclure :

$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$

Comme 0 n'est pas valeur propre de A, on sait que :

$\boxed{A \text{ est inversible.}}$

c) On résout $(A + I)X = 0$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, en utilisant la réduite de Gauss obtenue plus haut. On obtient : $2x-10y-4z = 0$, soit $x = 5y+2z$.

On a donc : $X \in \mathrm{SEP}_{-1}(A) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 5y+2z \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = y\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ceci montre que : $\mathrm{SEP}_{-1}(A) = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Comme la famille $(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ est libre (elle contient deux vecteurs non proportionnels), on conclut :

$\boxed{(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \text{ est une base du sous-espace propre de } A \text{ associé à la valeur propre } -1.}$

2) a) Pour déterminer u_2, on calcule $(A+I)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, d'où : $u_2 = (-1, -1, 2)$.

Pour montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ il suffit de vérifier que la matrice P de passage de la base canonique à la famille (u_1, u_2, u_3) est inversible.

Comme $u_1 = (1, 0, 0)$ et $u_3 = (2, 0, 1)$, on a $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On utilise alors la méthode de Gauss.

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Avec $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$, on a :

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

La réduite obtenue est triangulaire sans élément diagonal nul, elle est donc inversible et P aussi. Par conséquent :

$\boxed{\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

Le sous-espace propre de f associé à la valeur propre -1 est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par la famille $((5, 1, 0), (2, 0, 1))$, ce qui prouve bien que $u_3 = (2, 0, 1)$ est vecteur propre de f associé à la valeur propre -1.
De plus, on a $u_2 = 2(2, 0, 1) - (5, 1, 0)$, donc u_2 est aussi vecteur propre de f associé à la valeur propre -1.

b) $f(u_1) = f(e_1) = (-2, -1, 2) = (-1, 0, 0) + (-1, -1, 2) = -u_1 + u_2$.
On a aussi : $f(u_2) = -u_2$ et $f(u_3) = -u_3$. Par conséquent :

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

c) On poursuit le travail entrepris à la question 2a) :
Avec $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$, on trouve :

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Avec $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, on a :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Pour finir, avec $L_2 \leftarrow -L_2$, on obtient :

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.}$$

d) On calcule $T^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$T^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On conjecture et on vérifie par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ -n(-1)^n & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.}$$

La formule de changement de base assure que $A = PTP^{-1}$ et une récurrence permet de montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PT^nP^{-1}$.
Un calcul matriciel donne :

$$PT^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ -n(-1)^n & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}, \text{ d'où :}$$

$$PT^n = \begin{pmatrix} (n+1)(-1)^n & -(-1)^n & 2(-1)^n \\ n(-1)^n & -(-1)^n & 0 \\ -2n(-1)^n & 2(-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

$$PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} (n+1)(-1)^n & -(-1)^n & 2(-1)^n \\ n(-1)^n & -(-1)^n & 0 \\ -2n(-1)^n & 2(-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où :}$$

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} (n+1)(-1)^n & -5n(-1)^n & -2n(-1)^n \\ n(-1)^n & (1-5n)(-1)^n & -2n(-1)^n \\ -2n(-1)^n & 10n(-1)^n & (4n+1)(-1)^n \end{pmatrix}.}$$

Exercice 2 ....

1) La fonction cosinus ne s'annule pas sur $[0, \pi/3]$, elle est continue sur $[0, \pi/3]$, de même que la fonction qui à x associe $\sin^n x$. Par conséquent la fonction qui à x associe $\dfrac{\sin^n x}{\cos x}$ est continue sur $[0, \pi/3]$, en tant que quotient à dénominateur non nul de fonctions continues.

En conclusion :

$$\boxed{u_n \text{ est bien défini pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.}$$

On a $u_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left[-\ln|\cos x|\right]_0^{\pi/3} = -\ln(\frac{1}{2}) + \ln(1)$.

On conclut :

$$\boxed{u_1 = \ln(2).}$$

2) a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n(x)\cos(x)\,dx = \left[\frac{\sin^{n+1} x}{n+1}\right]_0^{\pi/3}$.

On a donc :

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}.}$$

b) $u_{n+2} - u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+2} x}{\cos x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x} dx$.

Par linéarité de l'intégration, on obtient : $u_{n+2} - u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x(\sin^2 x - 1)}{\cos x} dx$.

Comme $\sin^2 x - 1 = -\cos^2 x$, on a, après simplification :

$u_{n+2} - u_n = -\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n(x)\cos(x)\,dx$.

Grâce au calcul fait à la question2a), on en déduit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_n = -\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}.}$$

En appliquant la relation précédente avec $n = 1$, on a : $u_3 - u_1 = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\dfrac{3}{8}$.

Comme $u_1 = \ln(2)$, on a finalement :

$$\boxed{u_3 = \ln(2) - \frac{3}{8}.}$$

3) a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+1} x}{\cos x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x} dx$.

Par linéarité de l'intégration, on obtient : $u_{n+1}-u_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x(\sin x - 1)}{\cos x} dx$

Sur l'intervalle $[0, \pi/3]$, $\sin^n x \geq 0$, $\cos x \geq 0$ et $\sin x - 1 \leq 0$.
Par conséquent, $u_{n+1} - u_n$ est l'intégrale, bornes dans l'ordre croissant, d'une fonction négative et on a donc : $u_{n+1}-u_n \leq 0$.
On peut conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$$

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n est l'intégrale, bornes dans l'ordre croissant, d'une fonction positive donc $u_n \geq 0$.
La suite (u_n) est donc minorée (par 0) et comme elle est décroissante, on peut conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente.}}$$

4) a) La fonction sinus est croissante sur $[0, \pi/3]$ car sa dérivée, cosinus, est positive sur cet intervalle. Par conséquent : $\forall x \in [0, \pi/3]$, $\sin(0) \leq \sin x \leq \sin(\pi/3)$.
Ceci donne :

$$\boxed{\forall x \in [0, \pi/3],\ 0 \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

Un réel K possible est donc $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) La fonction $t \mapsto t^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc :

$\forall x \in [0, \pi/3]$, $0 \leq \sin^n x \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$. (1)

Par ailleurs, on a, pour tout x de $[0, \pi/3]$, $\frac{1}{2} \leq \cos x \leq .1$, d'où, par décroissance de la fonction inverse sur $[\frac{1}{2}, 1]$: $\forall x \in [0, \pi/3]$, $1 \leq \frac{1}{\cos x} \leq 2$. (2)

En multipliant les inégalités (1) et (2) membre à membre, on obtient :

$\forall x \in [0, \pi/3]$, $0 \leq \frac{\sin^n x}{\cos x} \leq 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

En intégrant, bornes dans l'ordre croissant, on trouve : $0 \leq u_n \leq 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \int_0^{\pi/3} 1 dx$,

soit :

$$\boxed{0 \leq u_n \leq \frac{2\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n.}$$

Comme $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right| < 1$, on a : $\lim_{n\to+\infty} (\frac{\sqrt{3}}{2})^n = 0$ et, par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

5) a) Comme $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right| < 1$, la série de terme général $(\frac{\sqrt{3}}{2})^n$ est convergente (série géométrique dont la raison est, en valeur absolue, plus petite que 1).

Comme on a : $0 \leq u_n \leq \frac{2\pi}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2})^n$, le critère de comparaison pour les séries à termes positifs assure que :

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n \text{ converge.}}$$

b) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^{\pi/3} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin^k x}{\cos x} dx$ (par linéarité de l'intégration).

Par conséquent : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos x} \sum_{k=0}^{n-1} \sin^k x \, dx$.

Comme, pour tout x de $[0, \pi/3]$, $\sin x \neq 1$, on obtient :

$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^{\pi/3} \frac{1-\sin^n x}{\cos x(1-\sin x)} dx$, d'où :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*, \ \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos x(1-\sin x)} dx - \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^n x}{\cos x(1-\sin x)} dx .}$$

c) Pour tout x de $[0, \pi/3]$, $1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \leq 1-\sin x \leq 1$ donc : $1 \leq \frac{1}{1-\sin x} \leq \frac{2}{2-\sqrt{3}}$.

Sur $[0, \pi/3]$, $\frac{\sin^n x}{\cos x} \geq 0$, on a donc : $0 \leq \frac{\sin^n x}{\cos x(1-\sin x)} \leq \frac{2}{2-\sqrt{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x}$.

En intégrant de 0 à $\pi/3$ (fonctions continues et bornes dans l'ordre croissant), on obtient : $0 \leq \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^n x}{\cos x(1-\sin x)} dx \leq \frac{2}{2-\sqrt{3}} u_n$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, on a (par encadrement) : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^n x}{\cos x(1-\sin x)} dx = 0$.

Le résultat de la question 5b) donne alors, après passage à la limite justifié :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos x(1-\sin x)} dx .}$$

d) On peut écrire $S = \int_0^{\pi/3} \dfrac{1}{\cos^2 x(1-\sin x)} \cos x\, dx$, ce qui donne, en arrangeant un peu : $S = \int_0^{\pi/3} \dfrac{1}{(1-\sin^2 x)(1-\sin x)} \cos x\, dx$.

La fonction qui à x associe $\sin x$ est de classe C^1 sur $[0, \pi/3]$ donc le changement de variable $u = \sin x$ est licite. On a $du = \cos x\, dx$ et en remplaçant :

$S = \int_0^{\sqrt{3}/2} \dfrac{1}{(1-u^2)(1-u)}\, du$.

Avec la relation $1-u^2 = (1-u)(1+u)$, on obtient bien :

$$\boxed{S = \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{(1-u)^2\,(1+u)}\, du\ .}$$

e) Par identification ou toute autre méthode, on trouve :

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\},\ \frac{1}{(1-u)^2(1+u)} = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} + \frac{2}{(1-u)^2}\Big).}$$

On a alors : $S = \dfrac{1}{4}\Big[-\ln|1-u| + \ln|1+u| + \dfrac{2}{1-u}\Big]_0^{\sqrt{3}/2}$.

Ceci peut s'écrire : $S = \dfrac{1}{4}\Big[\ln\Big|\dfrac{1+u}{1-u}\Big| + \dfrac{2}{1-u}\Big]_0^{\sqrt{3}/2}$.

On a donc : $S = \dfrac{1}{4}\Big(\ln(7+4\sqrt{3}) + \dfrac{4}{2-\sqrt{3}} - 2\Big)$.

En multipliant la fraction par $2+\sqrt{3}$ au numérateur et au dénominateur et en transformant le logarithme, on trouve : $S = \dfrac{1}{4}\Big(\ln(7+4\sqrt{3}) + 4(2+\sqrt{3}) - 2\Big)$.

Après simplification, on trouve finalement :

$$\boxed{S = \frac{6+4\sqrt{3}+\ln(7+4\sqrt{3})}{4}\ .}$$

Exercice 3 ....

1) a) Pour tout réel x, on a $(S_n \leq x) = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k \leq x)$.

Comme les variables X_1, X_2, …, X_n sont mutuellement indépendantes, on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(S_n \leq x) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leq x)$.

Les variables aléatoires X_k suivant toutes la même loi exponentielle de paramètre λ, on sait que :
$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $P(X_k \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$ et $P(X_k \leq x) = 0$ si $x < 0$.
On a donc finalement :

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall x \in \mathbb{R}_+,\ F_n(x) = (1 - e^{-\lambda x})^n. \\ \forall x \in]-\infty, 0[,\ F_n(x) = 0. \end{array}}$$

b) • Comme toute fonction de répartition, F_n est croissante sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\lim_{x \to -\infty} F_n(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_n(x) = 1$.

• De plus, F_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ (la fonction $x \mapsto (1 - e^{-\lambda x})^n$ est même continue sur $\mathbb{R}$) et F_n est continue sur $]-\infty, 0[$ (c'est la fonction nulle sur cet intervalle).
En 0, on a $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} F_n(x) = F_n(0) = 0$ et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} F_n(x) = 0$.
Par conséquent F_n est continue sur $\mathbb{R}$.

• Pour finir, F_n est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ (la fonction $x \mapsto (1 - e^{-\lambda x})^n$ est même de classe C^1 sur $\mathbb{R}$) et de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$ puisque c'est la fonction nulle sur cet intervalle.
En conclusion, F_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 0.

Les trois points précédents prouvent que :

$$\boxed{S_n \text{ est une variable aléatoire à densité.}}$$

En dérivant F_n, sauf en 0 bien sûr, on obtient :
$\forall x > 0$, $F_n'(x) = \lambda n e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1}$.
$\forall x < 0$, $F_n'(x) = 0$.
On a alors une densité f_n de S_n en posant $f_n(x) = F_n'(x)$ sur $\mathbb{R}^*$ et en posant, par exemple, $f_n(0) = 0$ si $n \geq 2$ et $f_1(0) = \lambda$, ce qui donne dans les deux cas :

$$\boxed{f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \lambda n e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}.}$$

2) $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $F_n(t) = (1-e^{-\lambda t})^n = (1-e^{-\lambda t})(1-e^{-\lambda t})^{n-1}$.
En développant, on obtient : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $F_n(t) = (1-e^{-\lambda t})^{n-1} - e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}$.
On peut écrire ceci sous la forme :
$F_n(t) = (1-e^{-\lambda t})^{n-1} - \dfrac{1}{\lambda n}\lambda n e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}$.

Pour n supérieur ou égal à 2, on reconnaît que $(1-e^{-\lambda t})^{n-1} = F_{n-1}(t)$ et on a bien :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \geq 2,\ F_n(t) = F_{n-1}(t) - \frac{1}{\lambda}\frac{f_n(t)}{n}.}$$

3) a) En intégrant l'égalité précédente sur $[0, x]$, les fonctions en jeu étant bien continues, on trouve : $\forall n \geq 2$, $I_n(x) = I_{n-1}(x) - \dfrac{1}{\lambda n}\displaystyle\int_0^x f_n(t)\,dt$.

Or, par définition : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F_n(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^0 f_n(t)\,dt + \int_0^x f_n(t)\,dt$.
Comme la première intégrale est nulle (car f_n est nulle sur $]-\infty, 0[$), on a :
$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)\,dt$.
On peut alors conclure :

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ I_n(x) = I_{n-1}(x) - \frac{1}{\lambda}\frac{F_n(x)}{n}.}$$

b) $I_1(x) = \displaystyle\int_0^x F_1(t)dt = \int_0^x (1-e^{-\lambda t})\,dt = \left[t + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^x = x + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}$.

On en déduit que $I_1(x) = x - \dfrac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda x})$, d'où finalement :

$$\boxed{I_1(x) = x - \frac{F_1(x)}{\lambda}.}$$

En écrivant, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, la relation obtenue à la question 3a) sous la forme $I_k(x) - I_{k-1}(x) = -\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{F_k(x)}{k}$, puis en sommant pour k allant de 2 à n (avec $n \geq 2$), on obtient : $\forall n \geq 2$, $I_n(x) - I_1(x) = -\dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{F_k(x)}{k}$.

On peut écrire alors : $\forall n \geq 2$, $I_n(x) = I_1(x) - \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{F_k(x)}{k}$.

En remplaçant $I_1(x)$ par son expression (trouvée un peu plus haut), on a :

$\forall n \geq 2, I_n(x) = x - \dfrac{F_1(x)}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda}\sum_{k=2}^{n}\dfrac{F_k(x)}{k}$.

En regroupant les deux derniers termes, on trouve enfin :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n(x) = x - \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}\frac{F_k(x)}{k}.}$$

4) a) Pour tout réel x positif, on a $J_n(x) = \int_0^x t f_n(t)dt$. On fait une intégration par parties en posant $u'(t) = f_n(t)$ et $v(t) = t$. On a alors $v'(t) = 1$.

Comme, pour tout x positif, $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt$, on sait que F_n est une primitive de f_n et on peut donc choisir $u(t) = F_n(t)$.

Les fonctions u et v étant bien de classe C^1 sur $[0, x]$, l'intégration par parties est licite et elle donne : $J_n(x) = \left[\, t F_n(t)\,\right]_0^x - \int_0^x F_n(t)dt$.

On trouve donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n(x) = x F_n(x) - I_n(x).}$$

b) On sait que $\int_{-\infty}^0 t f_n(t)\,dt = 0$ donc, pour montrer que S_n a une espérance, il suffit de prouver la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t f_n(t)\,dt$, c'est-à-dire de prouver que $J_n(x)$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, cette limite étant alors égale à l'espérance de S_n.

D'après la question précédente, $J_n(x) = xF_n(x) - I_n(x) = x\,\big(F_n(x) - 1\big) + \dfrac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{F_k(x)}{k}$.

La limite de $x\big(F_n(x) - 1\big)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est indéterminée, il faut donc en transformer l'expression : $x\big(F_n(x) - 1\big) = x\big((1 - e^{-\lambda x})^n - 1\big)$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, $e^{-\lambda x}$ tend vers 0, on peut donc utiliser l'équivalent classique : $(1+u)^n - 1 \underset{u \to 0}{\sim} n\,u$. On en déduit alors : $(1 - e^{-\lambda x})^n - 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} -n\,e^{-\lambda x}$.

On a donc : $x\big(F_n(x) - 1\big) \underset{x \to +\infty}{\sim} -nx\,e^{-\lambda x}$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^{-\lambda x} = 0$ (puisque $\lambda > 0$), on a $\lim\limits_{x \to +\infty} x\big(F_n(x) - 1\big) = 0$.

En revenant à l'expression de $J_n(x)$ écrite 7 lignes plus haut et en remarquant que, pour tout k de $\{1, 2, \ldots, n\}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{F_k(x)}{k} = \dfrac{1}{k}$, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} J_n(x) = \dfrac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$.

On conclut :

$$\boxed{E(S_n) = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.}$$

Concours EDHEC **28 Mars 2008**
Admission sur Titres 1ère année

RAPPORT ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

PRÉSENTATION DE L'ÉPREUVE :

• L'épreuve comportait trois exercices ce qui permettait de juger les candidats sur la totalité du programme de l'épreuve. Les correcteurs ont trouvé le sujet abordable, adapté et sélectif. Ils regrettent que nombre de candidats ne soient que très insuffisamment préparés, notamment en trigonométrie et dans la manipulation des variables aléatoires à densité.

• L'exercice 1 se fixait pour but d'étudier l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -10 & -5 \end{pmatrix}$, puis de déterminer la puissance $n^{\text{ème}}$ de A.

• L'exercice 2 proposait l'étude d'une suite définie par une intégrale : $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x}\, dx$.

• L'exercice 3 portant sur le programme de probabilités, avait pour objectif le calcul de l'espérance de la variable aléatoire égale au sup de n variables indépendantes suivant la même loi exponentielle.

MOYENNE :

Pour les 586 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est de 9,02 sur 20.

ANALYSE DES COPIES :

Les correcteurs constatent une fois encore que le niveau est très hétérogène, ceci étant, bien sûr, dû aux origines scolaires et universitaires diverses des candidats. La moyenne, plus faible que l'année dernière, pourrait être due à la présence de 212 candidats supplémentaires, pas forcément tous conscients de la difficulté d'une telle épreuve.
Cette année encore, les candidats semblent globalement plus à l'aise en analyse et en algèbre, en revanche, les probabilités (exercice 3) ont été très peu abordées, de nombreux candidats ayant visiblement fait l'impasse sur les variables aléatoires à densité.

CONCLUSION :

Le niveau global des candidats est, dans l'ensemble, correct, avec plus de candidats très bien préparés que l'année dernière, mais, malheureusement, beaucoup plus de candidats très faibles.
La présentation est, pour la plupart des copies, soignée et honnête et les candidats rédigent proprement, à quelques rares exceptions près.
Nous conseillons aux futurs candidats de se préparer d'une façon plus complète, en essayant de ne négliger aucun des points du programme.