
Marc-Antoine,
étudiant en pré-Master
BIENVENUE DANS NOS RESEAUX D'ENERGIE
Avec 250 entreprises partenaires, 27 000 anciens diplômés présents dans 121 pays, un maillage unique de professeurs, d'associations, et d'ambassadeurs, le réseau de l'EDHEC est une véritable force sur laquelle vous pourrez compter tout au long de votre cursus et de votre carrière. Venez vous inscrire dans une dimension résolument internationale et découvrir un nouveau monde, celui des réseaux et de l'excellence, qui vous ouvrira d'innombrable portes.
www.edhec-ge.com
EDHEC
BUSINESS SCHOOL

EDHEC
BUSINESS SCHOOL
Lille - Nice

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur titre en première année
(AST1)

MATHEMATIQUES

Jeudi 12 avril 2007

Durée de l'épreuve : 2 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

1) Montrer que l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$ est définie pour tout réel x.

On considère désormais la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$.

2) Établir que f est impaire.

3) a) Établir que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser, après avoir justifié son existence, une primitive de la fonction qui à t associe $\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$).

Vérifier ensuite que, pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \frac{3}{(2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{4x^2+1})\sqrt{x^2+1}\sqrt{4x^2+1}}.$$

b) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

4) a) En utilisant la relation $t^2 \leq t^2 + 1 \leq t^2 + 2t + 1$, valable pour tout réel t positif ou nul, montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\ln(\frac{2x+1}{x+1}) \leq f(x) \leq \ln 2$.

b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c) Dresser le tableau de variation complet de f.

Exercice 2

On désigne par E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de degré inférieur ou égal à 2.
On désigne par (e_1, e_2, e_3) la base canonique de E.
On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e_1(x) = 1$, $e_2(x) = x$ et $e_3(x) = x^2$.
Par ailleurs, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est notée (u_1, u_2, u_3).
On a donc : $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0)$ et $u_3 = (0, 0, 1)$.

On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}^3$ définie par :
$\forall P \in E$, $\varphi(P) = (\,P(0), P'(1), P''(2)\,)$, où $P'(1)$ et $P''(2)$ désignent les valeurs des dérivées première et seconde de P, respectivement en 1 et en 2.

1) Montrer que φ est linéaire.
2) Montrer que φ est injective et en déduire que φ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^3$.
3) a) Pour tout i de $\{1, 2, 3, 4\}$, calculer $\varphi(e_i)$.
   b) En déduire la matrice A de φ relativement aux bases canoniques de E et de $\mathbb{R}^3$.
   c) Retrouver ainsi le résultat de la deuxième question.
4) Pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, on pose $H_i = \varphi^{-1}(u_i)$.
   a) Montrer que (H_1, H_2, H_3) est une base de E.
   b) Déterminer la matrice A^{-1} puis exprimer H_1, H_2 et H_3 en fonction de e_1, e_2 et e_3.

Exercice 3

On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n (avec $n \geq 2$). Les tirages ayant lieu "au hasard", les boules ont toutes la même probabilité d'être tirée.
On admet que toutes les variables aléatoires présentées dans cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On définit une suite $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires par $U_1 = 1$, et, pour tout entier i supérieur ou égal à 2 : $U_i = 1$ si au $i^{\text{ème}}$ tirage on obtient un numéro qui n'a pas été obtenu lors des $(i-1)$ tirages précédents et $U_i = 0$ sinon.
Enfin, pour tout entier i supérieur ou égal à 1, on note T_i la variable aléatoire égale au numéro obtenu au $i^{\text{ème}}$ tirage.

1) Donner la loi de U_2.
2) a) Donner la loi de T_i.
   b) En déduire, grâce au système complet d'événements $(T_i = k)_{1 \leq k \leq n}$, que :
$$\forall i \in [\![2, n]\!],\ P(U_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{i-1}.$$
   c) Vérifier que cette formule reste valable pour $i = 1$.

Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on note $V_k(n)$ la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages.

3) a) Exprimer $V_k(n)$ en fonction des variables U_i.
   b) En déduire que $V_k(n)$ possède une espérance donnée par $E(V_k(n)) = n\left(1 - (1 - \frac{1}{n})^k\right)$.
   c) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} E(V_k(n)) = k$.

EDHEC 2007 : concours AST1
Corrigé de l'épreuve de mathématiques

Exercice 1

1) La fonction $h : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc continue sur tout intervalle de la forme $[x, 2x]$ si $x \geq 0$ ou $[2x, x]$ si $x \leq 0$. Ceci prouve que $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$ est définie pour tout réel x.

2) L'ensemble de définition de f est bien centré en 0 (c'est $\mathbb{R}$) et, pour tout réel x, on a : $f(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$. Le changement de variable $u = -t$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (donc de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration) donne alors : $f(-x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{(-u)^2+1}}(-du)$, d'où l'on déduit : $f(-x) = -\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}du$, soit $f(-x) = -f(x)$.

En conclusion :

$$\boxed{f \text{ est impaire.}}$$

3) a) En notant H une primitive de h sur $\mathbb{R}$, on a : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x) = H(2x) - H(x)$. Comme H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (puisque sa dérivée est h qui est continue), on peut affirmer que, par composition et différence, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

De plus : $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x) = 2\,h(2x) - h(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4x^2+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}\sqrt{x^2+1}}$.

En multipliant numérateur et dénominateur par $2\sqrt{x^2+1} + \sqrt{4x^2+1}$, on obtient :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}, f'(x) = \frac{3}{(2\sqrt{x^2+1} + \sqrt{4x^2+1})\sqrt{x^2+1}\sqrt{4x^2+1}}.}$$

b) On a tout de suite : $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x) > 0$, ce qui montre que :

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

4) a) Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, la relation donnée par l'énoncé nous donne : $t \leq \sqrt{t^2+1} \leq$ t + 1 ($\sqrt{t^2} = t$ car $t \geq 0$).
On peut alors inverser, pour tout t strictement positif, et on obtient :
$\forall t > 0,\ \dfrac{1}{t+1} \leq \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leq \dfrac{1}{t}$.

Pour tout réel x strictement positif, on peut intégrer ces fonctions continues sur $[x, 2x]$, avec les bornes dans l'ordre croissant, ce qui donne : $\int_x^{2x} \frac{1}{t+1}\,dt \le f(x) \le \int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt$, ou encore : $\ln(2x+1) - \ln x \le f(x) \le \ln 2x - \ln x$, ce qui s'écrit également :

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[,\ \ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) \le f(x) \le \ln 2.}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x+1} = 2$ donc, par continuité de *ln* en 2, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) = \ln 2$.
Le théorème d'encadrement permet de conclure :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2.}$$

c) Par imparité de f, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\ln 2$. On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\ln 2$	$\nearrow$ 0	$\ln 2$

Exercice 2

1) Pour tout couple de polynômes (P, Q) de E et pour tout réel λ, on a :
$\varphi(\lambda P + Q) = (\ (\lambda P + Q)(0), (\lambda P + Q)'(1), (\lambda P + Q)''(2)\ )$.
Par définition de l'addition des fonctions et du produit d'une fonction par un réel et par linéarité de la dérivation, on a : $\varphi(\lambda P + Q) = (\ \lambda P(0) + Q(0), \lambda P'(1) + Q'(1), \lambda P''(2) + Q''(2)\ )$.
En scindant ce triplet en deux, on obtient :
$\varphi(\lambda P + Q) = (\ \lambda P(0), \lambda P'(1), \lambda P''(2)\ ) + (\ Q(0), Q'(1), Q''(2)\ )$.
Par conséquent : $\varphi(\lambda P + Q) = \lambda\,(P(0), P'(1), P''(2)\ ) + (\ Q(0), Q'(1), Q''(2)\ )$.
Finalement : $\varphi(\lambda P + Q) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$.
En conclusion :

$$\boxed{\varphi \text{ est linéaire.}}$$

2) Soit P un polynôme élément de Ker φ.
En posant, pour tout réel x, $P(x) = ax^2 + bx + c$, on a $P(0) = c$, $P'(1) = 2a + b$ et $P''(2) = 2a$.

$$P \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow (P(0), P'(1), P''(2)\ ) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} P(0) = 0 \\ P'(1) = 0 \\ P''(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 2a + b = 0 \\ 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

On a donc : $P \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow P = 0$.
Ker φ est donc réduit au polynôme nul, on peut en conclure que :

$$\boxed{\varphi \text{ est injective.}}$$

Comme de plus, $\dim E = \dim \mathbb{R}^3$ (la dimension commune valant 3), on en déduit que φ est bijective (conséquence de la formule du rang).
On a donc :

$$\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme de } E \text{ dans } \mathbb{R}^3.}$$

3) a) Pour tout réel x :
$e_0(x) = 1$ donc $e_0(0) = 1$, $e_0'(1) = 0$ et $e_0''(2) = 0$.
On a donc :

$$\boxed{\varphi(e_0) = (1, 0, 0).}$$

$e_1(x) = x$ donc $e_1(0) = 0$, $e_1'(1) = 1$ et $e_1''(2) = 0$.
On a donc :

$$\boxed{\varphi(e_1) = (0, 1, 0).}$$

$e_2(x) = x^2$ donc $e_2(0) = 0$, $e_2'(1) = 2$ et $e_2''(2) = 2$.
On a donc :

$$\boxed{\varphi(e_2) = (0, 2, 2).}$$

b) On en déduit la matrice de φ relativement aux bases canoniques de E et de $\mathbb{R}^3$:

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

c) Cette matrice est triangulaire sans élément diagonal nul, elle est donc inversible et on retrouve ainsi le fait que φ est bijective.

4) a) (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et φ^{-1} est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans E donc φ^{-1} transforme la base (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ en une base de E.
En conclusion :

$$\boxed{(H_1, H_2, H_3) \text{ est une base de } E.}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Par la méthode du pivot de Gauss, la transformation élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour finir, avec $L_3 \leftarrow \dfrac{1}{2} L_3$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.}$$

Comme A^{-1} est la matrice de φ^{-1} relativement aux bases (u_1, u_2, u_3) et (e_1, e_2, e_3), on en déduit, par lecture des colonnes de A^{-1}, que :

$H_1 = e_1$, $H_2 = e_2$ et $H_3 = -e_2 + \frac{1}{2} e_3$.

Ceci s'écrit aussi:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ H_1(x) = 1,\ H_2(x) = x \text{ et } H_3(x) = \frac{x^2}{2} - x.}$$

Exercice 3

1) Par définition, U_2 est la variable de Bernoulli qui prend la valeur 1 si et seulement si les deux premiers tirages donnent des numéros distincts.
($U_2 = 1$) est donc réalisé si et seulement si l'on tire n'importe quelle boule au premier tirage (probabilité égale à 1) et une boule portant un numéro différent au deuxième tirage (probabilité égale à $\frac{n-1}{n}$).

Par indépendance (tirages avec remise), on a : $P(U_2 = 1) = 1 \times \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n}$.

En conclusion :

$$\boxed{U_2 \text{ suit la loi } \mathcal{B}(\frac{n-1}{n}).}$$

2) a) Les tirages ayant lieu avec remise, le contenu de l'urne est identique à chaque tirage. La probabilité d'obtenir, à un tirage quelconque, la boule portant le numéro i (avec $1 \leq i \leq n$) est ainsi égale à $\frac{1}{n}$.

Par conséquent :

$$\boxed{T_i \text{ suit la loi uniforme sur } [|1, n|].}$$

b) On écrit la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $(T_i = k)_{1 \leq k \leq n}$, ce qui donne : $\forall i \in [|2, n|]$, $P(U_i = 1) = \sum_{k=1}^{n} P_{(T_i = k)}(U_i = 1) P(T_i = k)$.

$P_{(T_i=k)}(U_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{i-1}$: en effet, sachant que la $i^{\text{ème}}$ boule porte le numéro k, l'événement ($U_i = 1$) est réalisé si et seulement si les ($i - 1$) premiers tirages ont donné des boules portant toutes un numéro différent de k, ce qui assure que c'est bien au $i^{\text{ème}}$ tirage seulement que l'on obtient un numéro distinct de tous les numéros précédents.

En remplaçant, on obtient : $\forall i \in [|2, n|]$, $P(U_i = 1) = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{i-1} \frac{1}{n} = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{i-1} \frac{1}{n}$.

On a bien :

$$\boxed{\forall i \in [\![2, n]\!],\ P(U_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{i-1}.}$$

2) c) Pour $i = 1$, cette formule donne $P(U_1 = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^0 = 1$, ce qui est correct puisque U_1 est la variable certaine égale à 1.

3) a) La variable aléatoire $V_k(n)$ est égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages.
Les variables aléatoires U_i ($i \geq 2$) prennent la valeur 1 à chaque fois que l'on obtient un numéro distinct des numéros précédents, on en déduit que la variable aléatoire $\sum_{i=2}^{k} U_i$ est égale au nombre de numéros distincts obtenus entre le 2$^{\text{ème}}$ tirage et le $n^{\text{ème}}$.
Si l'on ajoute 1 pour comptabiliser le numéro obtenu au premier tirage, on obtient le nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages, ce qui est exactement $V_k(n)$.
On a donc $V_k(n) = 1 + \sum_{i=2}^{k} U_i$, et comme $U_1 = 1$, on a finalement :

$$\boxed{V_k(n) = \sum_{i=1}^{k} U_i\ .}$$

b) Par linéarité de l'espérance, $E\big(V_k(n)\big) = \sum_{i=1}^{k} E(U_i)$.

Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a $E(U_i) = P(U_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{i-1}$.

On a donc : $E\big(V_k(n)\big) = \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{i-1}$.

Comme $1 - \frac{1}{n} \neq 1$, on en déduit : $E\big(V_k(n)\big) = \dfrac{1 - (1 - \frac{1}{n})^k}{1 - (1 - \frac{1}{n})}$.

Ceci se simplifie et donne :

$$\boxed{E\big(V_k(n)\big) = n\left(1 - (1 - \frac{1}{n})^k\right).}$$

c) On sait que $(1 + x)^\alpha - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on en déduit que : $(1 - \frac{1}{n})^k - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{k}{n}$.

En multipliant par -1, on obtient : $1 - (1 - \frac{1}{n})^k \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{k}{n}$.

En multipliant par n, on a finalement : $E\big(V_k(n)\big) \underset{n \to +\infty}{\sim} k$.

Ceci implique donc que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} E\big(V_k(n)\big) = k.}$$