Chapitre 2

Nombres complexes

Maths Spé - MP/MP* et PSI/PSI* - Concours 2015

Cours, méthodes, énoncés des exercices

Difficulté des exercices

Exercices classiques :

★ - Facile ★★ - Moyen ★★★ - Difficile ★★★★ - Très Difficile

Exercices d'approfondissement :

◆ - Facile ◆◆ - Moyen ◆◆◆ - Difficile ◆◆◆◆ - Très Difficile

Sommaire

Exercices classiques **2**

1 - Révisions de Maths Sup ★ 2

2 - Quelques calculs de sommes ★★ 4

3 - Factorisation dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ ★★★ 8

4 - Un peu de géométrie : le théorème de Napoléon ★★ 11

Exercices d'approfondissement **15**

5 - Deux cas d'égalité ◆◆ 15

6 - Demi-plan de Poincaré ◆◆ 18

Exercices classiques

Exercice 1 - Révisions de Maths Sup ★

1) Deuxième inégalité triangulaire.

(a) Établir, pour tout couple (x, y) de nombres complexes, l'inégalité :

$$|x| - |y| \leqslant |x - y| \, .$$

2) Parties réelle et imaginaire d'un quotient.

(a) Soient a un nombre complexe quelconque, et b un nombre complexe non nul. Exprimer $\mathrm{Re}\left(\dfrac{a}{b}\right)$ et $\mathrm{Im}\left(\dfrac{a}{b}\right)$ en fonction des parties réelles et imaginaires de a et de b ainsi que du module de b. Préciser le résultat obtenu lorsque $a = 1$.

(b) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \, , k \in \mathbb{Z}\}$. Calculer $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1 + e^{i\alpha}}{1 + e^{i\beta}}\right)$ et $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1 + e^{i\alpha}}{1 + e^{i\beta}}\right)$.

Exercice 2 - Quelques calculs de sommes ★★

1) Noyau de Dirichlet et noyau de Féjer.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On définit le noyau de Dirichlet $D_n(\theta)$ par :

$$D_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta}$$

et le noyau de Féjer par :

$$F_n(\theta) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(\theta)$$

La suite $(F_n(\theta))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite des moyennes de Césaro des noyaux de Dirichlet.

(a) Montrer que si $\theta \notin 2\pi Z$, alors :

$$D_n(\theta) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

(b) Montrer que si $\theta \notin 2\pi Z$, alors :

$$F_n(\theta) = \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

(c) (Difficile) En revenant à la définition de $F_n(\theta)$, montrer que :

$$F_n(\theta) = \sum_{|l| \leqslant n} \left(1 - \frac{|l|}{n+1}\right) e^{il\theta}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \, k \in \mathbb{Z}\}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer les sommes suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(ak + b)$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$

Exercice 3 - Factorisation dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ ★★★

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$ le polynôme $X^{2n} - 1$.

Application au calcul de l'intégrale de Poisson : $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2r\cos(t) + r^2\right)\, \mathrm{d}t$.

2) Pour $r \in \left]1\,,+\infty\right[$, donner une expression simple de :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - 2r\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + r^2\right)$$

3) En invoquant un théorème du cours, en déduire que :

$$\int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2r\cos(t) + r^2\right)\, \mathrm{d}t = 2\pi\ln(r)$$

Exercice 4 - Un peu de géométrie : le théorème de Napoléon ★★

On considère le plan euclidien muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Notons $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Soient U, V et W trois points du plan d'affixes respectives u, v et w.

1) Montrer que le triangle UVW est équilatéral direct si et seulement si $u - v = -j^2(w - v)$.

2) Montrer que le triangle UVW est équilatéral direct si et seulement si $u + jv + j^2w = 0$.

Soit ABC un triangle direct *quelconque*. Soient P, Q et R trois points du plan tels que les triangles BPC, CQA et ARB soient équilatéraux directs. On note respectivement U, V et W le centre de gravité du triangle BPC (resp. CQA, resp. ARB).

3) Faire un dessin.

4) Montrer que le triangle UVW est équilatéral direct et que son centre de gravité est confondu avec celui du triangle ABC.

Exercices d'approfondissement

Exercice 5 - Deux cas d'égalité ◆◆

1) (Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire) Soient $(w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que $|w_1 + \ldots + w_n| = |w_1| + \ldots + |w_n|$. Montrer que pour tous j, l distincts dans $\{1, \ldots, n\}$, on a $\mathrm{Re}\left(\overline{w_j} w_l\right) = |w_j||w_l|$. En déduire qu'il existe $\theta \in \left]-\pi\,,\pi\right]$ tel que pour tout $j \in [\![1\,,\, n]\!]$, on a $w_j = |w_j|e^{i\theta}$.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients positifs. On suppose de plus que pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ à coordonnées positives, le vecteur Ax est à coordonnées strictement positives.

Pour $z = (z_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathbb{C}^n$, on note $|z|$ le vecteur de coordonnées $(|z_j|)_{1 \leqslant j \leqslant n}$. Montrer que $A|z| = |Az|$ si et seulement si il existe $\theta \in \left]-\pi\,,\pi\right]$ tel que pour tout $j \in [\![1\,,\, n]\!]$, on a : $z_j = |z_j|e^{i\theta}$.

Exercice 6 - Demi-plan de Poincaré ◆◆

Notons $\mathcal{H}$ l'ensemble des nombres complexes dont la partie imaginaire est strictement positive.

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$$

$\mathcal{H}$ est le *demi-plan de* Poincaré. Définissons :

$$c : \begin{cases} \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R} \\ z \longmapsto \dfrac{|z|^2+1}{2\,\mathrm{Im}\,(z)} \end{cases}$$

et pour tout réel θ, définissons :

$$A_\theta : \begin{cases} \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \dfrac{z\cos(\theta)-\sin(\theta)}{z\sin(\theta)+\cos(\theta)} \end{cases}$$

1) (a) Vérifier que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la fonction A_θ est bien définie.

(b) Pour tout $z \in \mathcal{H}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, déterminer $\mathrm{Im}\,(A_\theta(z))$. En déduire que $A_\theta(z) \in \mathcal{H}$.

2) (a) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, A_θ est bijective.

(b) Montrer que l'application $\theta \in (\mathbb{R},+) \longmapsto A_\theta \in \mathrm{Bij}(\mathcal{H})$ est un morphisme de groupes. $\mathrm{Bij}(\mathcal{H})$ représente le groupe (muni de la loi de composition) des bijections de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$.

3) (a) Montrer que pour tout réel θ, $c \circ A_\theta = c$.

(b) Soient $(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2$ et $z \in \mathcal{H} \setminus \{i\}$. Montrer que $A_\theta(z) = A_{\theta'}(z)$ si et seulement si $\theta - \theta' \in \pi\mathbb{Z}$.

4) Soit $z_0 \in \mathcal{H} \setminus \{i\}$. Notons $\mathcal{C}_{z_0}$ le cercle de centre $ic(z_0)$ et de rayon $\sqrt{c(z_0)^2-1}$. Notons $\mathcal{O} = \{A_\theta(z_0),\ \theta \in \mathbb{R}\}$.

(a) Montrer que $\mathcal{O}$ est une partie du cercle $\mathcal{C}_{z_0}$.

(b) Montrer que $\mathcal{O}$ est égal au cercle $\mathcal{C}_{z_0}$.