Irrationalité de $\zeta(2)$

Maths SUP - Concours 2015

Correction

I. Étude de la convergence de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1}(p) - S_n(p) = \dfrac{1}{(n+1)^p} > 0$, et donc :

$$\boxed{\text{La suite } (S_n(p))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante}}$$

2) (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \in \left]0\,,+\infty\right[\;\mapsto\; \dfrac{1}{t^p}$ est décroissante sur $[\,k\,,k+1\,]$. On a donc :

$$\forall t \in [\,k\,,k+1\,]\,,\ \frac{1}{(k+1)^p} \leqslant \frac{1}{t^p} \leqslant \frac{1}{k^p}.$$

On en déduit, par *croissance de l'intégration* sur $[\,k\,,k+1\,]$ $(k \leqslant k+1)$ les fonctions en présence étant continues sur ce segment :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^p}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^p}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k^p}\,\mathrm{d}t.$$

<u>Conclusion</u> :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(k+1)^p} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^p}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^p}}$$

Point méthode

Pour encadrer l'intégrale d'une fonction f sur un segment $[\,a\,,b\,]$, il est souvent utile d'encadrer $f(t)$ pour tout $t \in [\,a\,,b\,]$, puis d'intégrer les inégalités obtenues à l'aide de la *croissance de l'intégration*. Se souvenir que pour appliquer la *positivité* ou la *croissance* de l'intégration sur un segment $[\,a\,,b\,]$, il ne faut pas pas oublier de vérifier que les fonctions en présences sont *continues* sur ce segment et que les bornes a et b sont rangées dans l'ordre croissant. Des conditions analogues s'appliquent aux intégrales généralisées, voir le **Polycopié "Intégration sur un intervalle quelconque"**.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$. En substituant $k-1$ à k (avec $k-1 \geqslant 1$ puisque $k \geqslant 2$) dans l'inégalité obtenue à la question précédente, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 2,\ \frac{1}{k^p} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^p}\,\mathrm{d}t.$$

En sommant ces inégalités pour k allant de 2 à n, on en déduit :

$$S_n(p) - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^p} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^p}\,\mathrm{d}t.$$

La relation de Chasles permet d'affirmer que : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^p}\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{n} \frac{1}{t^p}\,\mathrm{d}t$. Or, on a :

$$\begin{aligned}\int_{1}^{n} \frac{1}{t^p}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{p+1}\frac{1}{t^{p+1}}\right]_1^n \\ &= \frac{1}{p+1}\left(1 - \frac{1}{n^{p+1}}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{p+1}.\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ S_n(p) - 1 \leqslant \int_{1}^{n} \frac{1}{t^p}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{p+1}}$$

(c) La suite $(S_n(p))_{n\in\mathbb{N}*}$ est croissante d'après la question **1)**. De plus, la question précédente prouve que cette suite est majorée (par $1+\dfrac{1}{p+1}$, qui ne dépend pas de n).

Conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (S_n(p))_{n\in\mathbb{N}*} \text{ converge}}$$

II. Polynômes de Bernoulli et nombres de Bernoulli

1) Existence : comme f est continue sur $[0,1]$, le *théorème fondamental de l'analyse* assure que f admet une primitive sur $[0,1]$. Soient alors g une primitive de f sur $[0,1]$, et F la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall t \in [\,0\,,1\,],\ F(t) = g(t) - \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a alors, g étant une primitive de f et $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ étant une constante :

$$F' = f \text{ , et : } \int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Unicité : supposons qu'il existe une fonction $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ telle que $G' = f$ *et* : $\int_0^1 G(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Les fonctions F et G sont alors deux primitives de f sur $[0,1]$. Il existe donc une constante réelle $k \in \mathbb{R}$ telle que : $F - G = k$. En intégrant cette égalité, il vient alors :

$$\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 G(t)\,\mathrm{d}t = k.$$

Comme F et G sont deux primitives de f, on en déduit que : $k = 0$, et donc : $G = F$.

Conclusion :

$$\boxed{\text{Il existe une unique fonction } F\text{, définie et continue sur } [0,1]\text{, telle que : } F' = f \text{ et : } \int_0^1 F(t)\;dt = 0}$$

2) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}(n)$ définie par :

$$\mathscr{P}(n) : \quad \text{"le polynôme } B_n \text{ est défini de manière unique"}$$

est vraie.

— Initialisation : Par hypothèse, on a : $B_0 = 1$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

— Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n-1)$ vraie et montrons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Par hypothèse, on a :

$$B_n' = nB_{n-1} \quad \text{et :} \quad \int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

D'après la question précédente (appliquée à $f = nB_{n-1}$, qui est bien continue sur $[0,1]$ en tant que fonction polynomiale), le polynôme B_n est alors déterminé de manière unique.

Ainsi, si $\mathscr{P}(n-1)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

— Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme B_n est unique, et ainsi :

$$\boxed{\text{Les relations i, ii et iii définissent une } \textit{unique} \text{ suite } (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ de polynômes de } \mathbb{R}[X]}$$

3) Un calcul rapide donne :

$$\boxed{B_1(X) = X - \frac{1}{2} \quad \text{et :} \quad B_2(X) = X^2 - X + \frac{1}{6}}$$

On en déduit alors, en évaluant ces expressions en 0 :

$$\boxed{b_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{et :} \quad b_2 = \frac{1}{6}}$$

4) (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Comme : $B_n' = nB_{n-1}$, alors, en intégrant cette relation sur $[0,1]$, les fonctions en présences étant continues sur ce segment, on obtient :

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_n'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 B_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme : $n \geqslant 2$, alors : $n-1 \geqslant 1$, et donc, d'après (iii) : $\displaystyle\int_0^1 B_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t = 0$. On peut conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ B_n(1) - B_n(0) = 0}$$

(b) Idée : Nous allons utiliser ici *l'unicité* de la suite des polynômes de Bernoulli. Pour montrer que les polynômes $B_n(X)$ et $(-1)^n B_n(1-X)$ $(n \in \mathbb{N})$ sont égaux, il suffit ici de montrer que les polynômes $(-1)^n B_n(1-X)$ $(n \in \mathbb{N})$ vérifient aussi les relations i), ii) et iii) ; par unicité, on aura alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$.

Notons, pour tout entier naturel n, $C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$.

i) On a : $C_0(X) = (-1)^0 B_0(1-X) = 1$.

ii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En dérivant la relation définissant C_n (et en prenant soin de ne pas oublier de dériver $1-X$ en -1 dans la dérivation de la composée), on a :

$$\begin{aligned} C_n'(X) &= -(-1)^n B_n'(1-X) && \text{soit, d'après la propriété ii) :} \\ &= (-1)^{n-1} n B_{n-1}(1-X) \\ &= nC_{n-1}. \end{aligned}$$

iii) Enfin, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 C_n(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 (-1)^n B_n(1-t)\,\mathrm{d}t \\ &= (-1)^n \int_0^1 B_n(1-t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

La fonction $t \in [\,0\,,1\,] \mapsto 1-t$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, le changement de variable $u = 1-t$, $du = -dt$ permet d'écrire que :

$$\begin{aligned} \int_0^1 B_n(1-t)\,\mathrm{d}t &= \int_1^0 B_n(u)(-\,\mathrm{d}u) && \text{soit :} \\ &= \int_0^1 B_n(u)\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \int_0^1 C_n(t)\,\mathrm{d}t &= (-1)^n \int_0^1 B_n(1-t)\,\mathrm{d}t && \text{soit, comme } n \geqslant 1 \text{ :} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on a établi que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les propriétés i), ii) et iii). Par *unicité* de la suite des polynômes de Bernoulli, on peut désormais conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (-1)^n B_n(1-X) = B_n(X).}$$

Point méthode

Exploiter une caractérisation. Pour montrer que deux éléments A et B d'un ensemble E sont égaux en mathématiques, on peut utiliser une *caractérisation* de A. En effet, si l'on dispose d'une *caractérisation* de l'objet A de la forme "A est *l'unique* objet de E à satisfaire une propriété P", alors pour montrer que $B = A$, il suffira de montrer que B vérifie aussi cette propriété P. C'est exactement ce qu'on a fait ici pour établir l'égalité des polynômes $B_n(X)$ et $(-1)^n B_n(1-X)$.

Remarque

Comme le soulignent de nombreux **RAPPORTS DE JURY**, il convient de ne pas confondre *propriété* et *caractérisation* d'un objet mathématique.

Une propriété est une assertion vérifiée par un objet. *Par exemple*, dans la phrase "les élèves de l'école Polytechnique ont un statut militaire", le fait d'avoir un statut militaire est une propriété (parmi d'autres) des élèves de l'école Polytechnique. Il n'y a alors pas *nécessairement* équivalence entre vérifier l'assertion et être l'objet considéré. Dans notre exemple, il n'y a pas équivalence entre "avoir un statut militaire" et "être élève de l'école Polytechnique". Tous les militaires ne sont pas polytechniciens !

Une caractérisation d'un objet est une propriété qui, comme son nom l'indique, *caractérise* un objet : l'objet est *unique* à la vérifier. *Par exemple*, dans la phrase "la lune est *l'unique* satellite naturel de la Terre", il y a ici *équivalence* entre "être un satellite naturel de la Tere" et "être la Lune". Pour montrer qu'un astre est la Lune, montrer qu'il s'agit d'un satellite naturel de la Terre sera alors suffisant.

(c) D'après le résultat de la question précédente, pour tout entier naturel n, on a : $b_n = (-1)^n B_n(1)$. Or, on a également, lorsque n est non nul : $B_n(1) = B_n(0) = b_n$. On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = (-1)^n b_n$, et donc, en particulier : $\forall p \in \mathbb{N}$, $b_{2p+1} = -b_{2p+1}$. On peut finalement conclure :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ b_{2p+1} = 0}$$

5) (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme B_n est de degré n (ce que l'on pourrait établir par récurrence simple sur n à l'aide des relations i) et ii)), alors en particulier : $B_n \in \mathbb{R}_n[X]$. La *formule de Taylor pour les polynômes* appliquée à B_n au point 0 permet alors d'écrire que :

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} X^k.$$

Le soin est laissé au lecteur de vérifier par récurrence simple sur k que de la relation ii) on déduit, pour tout $k \in [\![\, 0\,,\, n \,]\!]$:

$$B_n^{(k)}(X) = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}(X),$$

ce qui permet en particulier d'écrire que :

$$B_n^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!} b_{n-k}.$$

On obtient finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k}$$

Rappel de cours

Théorème (Formule de Taylor pour les polynômes)**.** *Soient* $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$. *On a :*

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k. \qquad (\bigstar)$$

Cette formule est au programme en filière MPSI et *à la limite du programme* en PCSI et PTSI. Il est cependant bon de connaître les idées de sa démonstration. Un preuve élégante utilise des arguments d'algèbre linéaire. On commence par remarquer que l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \quad \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k \end{cases}$$

est linéaire. Par conséquent, le lecteur pourra se convaincre qu'il suffit de vérifier la formule sur les éléments d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (voir la Fiche méthodologique **"Applications linéaires"**).

La famille $\left((X-\alpha)^k\right)_{k \in [\![0\,,\,n]\!]}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, échelonnée en degrés donc libre, de longueur $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$. On constate enfin (sans calculs !) que la formule ($\bigstar$) est vraie pour $P = (X-a)^k$ pour tout $k \in [\![0\,,\,n]\!]$, ce qui achève la démonstration.

Comment conclure sans calculs ? Il faut se souvenir que $\alpha \in \mathbb{R}$ est racine de P d'ordre de multiplicité au moins $n \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si α est racine de P, P',..., et $P^{(n-1)}$. Si $P(X) = (X-a)^k$, α est racine d'ordre de multiplicité k de P donc, sans calculs, on a : $P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(k-1)}(a) = 0$. De plus, P étant de degré k, toutes les dérivées d'ordre supérieur s'annulent. Il ne reste plus qu'un terme dans la somme, et on peut remarquer qu'il s'agit justement de P.

Une démonstration algébrique alternative est présentée dans le Polycopié **"Polynômes"**. D'autres preuves utilisent des arguments issus de l'analyse (*formule de* Taylor *avec reste intégral* ou *égalité de* Taylor-Lagrange par exemple) en considérant la fonction polynomiale associée.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. En évaluant le résultat de la question précédente en 1, on obtient :

$$\begin{aligned} B_n(1) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} && \text{soit, en isolant le terme en k = 0 :} \\ &= b_n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}. \end{aligned}$$

Mais comme : $n \geqslant 2$, le résultat de la question **II.4)a)** assure que : $B_n(1) = b_n$. On peut désormais conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\, n \geqslant 2,\ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} = 0}$$

(c) Soit $p \in \mathbb{N}$. En réécrivant le résultat de la question **II.5)a)** pour $n = 2p$, on obtient :

$$B_{2p}(X) = \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} b_{2p-k} X^k.$$

En évaluant cette dernière relation en 1, il vient alors :

$$\begin{aligned} B_{2p}(1) &= \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} b_{2p-k} && \text{soit avec } k' = 2p-k : \\ &= \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{2p-k} b_k \\ &= \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} b_k. \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ b_{2p} = \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} b_k}$$

(d) Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$. D'après la question précédente, on a : $b_{2p+2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2p+2} \binom{2p+2}{k} b_k$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} b_{2p+2} &= \sum_{k=0}^{2p-2} \binom{2p+2}{k} b_k + \binom{2p+2}{2p-1} b_{2p-1} + \binom{2p+2}{2p} b_{2p} + \binom{2p+2}{2p+1} b_{2p+1} + \binom{2p+2}{2p+2} b_{2p+2} \\ &= \sum_{k=0}^{2p-2} \binom{2p+2}{k} b_k + \binom{2p+2}{2p-1} b_{2p-1} + \binom{2p+2}{2p} b_{2p} + (2p+2) b_{2p+1} + b_{2p+2} \\ &= \sum_{k=0}^{2p-2} \binom{2p+2}{k} b_k + (2p+2)(2p+1) b_{2p} + b_{2p+2}, && \text{car } p \geqslant 2 \text{ et ainsi : } b_{2p-1} = b_{2p+1} = 0. \end{aligned}$$

On en déduit finalement que :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ p \geqslant 2,\ b_{2p} = -\frac{1}{(2p+2)(2p+1)} \sum_{k=0}^{2p-2} \binom{2p+2}{k} b_k}$$

III. Calcul de $\zeta(2p)$

1) Il s'agit d'un calcul très classique. Soient $t \in]\,0\,,\pi\,]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Commençons par remarquer, à l'aide des nombres complexes, que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \exp(2ikt)\right)$, où, d'après la formule de Moivre, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \exp(2ikt)$ est la somme des n premiers termes consécutifs de la suite géométrique $(\exp(2it)^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

Rappel de cours

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique : considérons un nombre complexe a non nul et $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ avec $q \geqslant p$. Se souvenir que :

$$\sum_{k=p}^{q} a^k = \begin{cases} a^p \dfrac{1-a^{q-p+1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ q-p+1 & \text{si } a = 1 \end{cases}.$$

Attention à ne pas oublier le premier terme (ici, a^p) dans la formule !
Se rappeler également que l'intervalle $[\![\, p\,,\, q \,]\!]$ contient $q-p+1$ entiers.

On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \exp(2ikt) = \begin{cases} e^{2it}\,\dfrac{1-e^{2int}}{1-e^{2it}} & \text{si } t \in \left]0\,,\pi\right[\\ n & \text{si } t = \pi \end{cases}.$$

Si $t \in \left]0\,,\pi\right[$, *en factorisant par l'exponentielle moitié*, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1-e^{2int}}{1-e^{2it}} &= \frac{e^{int}\left(e^{-int}-e^{int}\right)}{e^{it}\left(e^{-it}-e^{it}\right)} \\ &= e^{i(n-1)t}\,\frac{e^{-int}-e^{int}}{e^{-it}-e^{it}} \\ &= e^{i(n-1)t}\,\frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \qquad \text{grâce aux formules d'Euler.} \end{aligned}$$

Rappel de cours

Propriété (Formules d'Euler)**.** *On a :* $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$, et : $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$.

On en déduit que : $\mathrm{Re}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \exp(2ikt)\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i(n+1)t}\,\dfrac{\sin(nt)}{\sin(t)}\right) = \cos\left((n+1)t\right)\dfrac{\sin(nt)}{\sin(t)}$.

En utilisant les formules de duplication, on peut affirmer que :

$$\begin{aligned} \sin((2n+1)t) - \sin(t) &= \sin((n+1)t+nt) - \sin((n+1)t-nt) \\ &= 2\cos((n+1)t)\sin(nt). \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \cos(2kt) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \exp(2ikt)\right) \\ &= \cos((n+1)t)\frac{\sin(nt)}{\sin(nt)} \qquad \text{soit d'après ce qui précède :} \\ &= \frac{\sin((2n+1)t)-\sin(t)}{2\sin(t)} \\ &= \frac{\sin((2n+1)t)}{2\sin(t)} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

<u>Conclusion</u> :

$$\boxed{\forall t \in \left]0\,,\pi\right[,\ \sum_{k=1}^{n} \cos(2kt) + \frac{1}{2} = \frac{\sin((2n+1)t)}{2\sin(t)}}$$

2) Soit $f : [0\,,\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,,\pi]$.

<u>Idée</u> : La régularité de la fonction f nous permet ici de faire une intégration par parties.

Attention !

Les élèves oublient parfois que l'intégration par parties est un théorème avec des hypothèses. Pour avoir une rédaction juste et rigoureuse (ce que tout correcteur attend), il faut prendre soin de vérifier les hypothèses de ce théorème avant de l'appliquer.

Théorème. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soient $u, v : [a, b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors,*

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [uv]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

où $[uv]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Il ne faut pas oublier de vérifier que u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Ici, les fonctions $t \in [0, \pi] \longmapsto f(t)$ et $t \in [0, \pi] \longmapsto \dfrac{-1}{2n+1}\cos((2n+1)t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. D'après le *théorème d'intégration par parties*, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(t)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{-1}{2n+1}f(t)\cos((2n+1)t)\right]_0^\pi + \frac{1}{2n+1}\int_0^\pi f'(t)\cos((2n+1)t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{f(\pi)+f(0)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\int_0^\pi f'(t)\cos((2n+1)t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Et par *inégalité triangulaire*,

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(\pi)+f(0)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\int_0^\pi f'(t)\cos((2n+1)t)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \frac{|f(\pi)|+|f(0)|}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\int_0^\pi |f'(t)\cos((2n+1)t)\,\mathrm{d}t|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{|f(\pi)|+|f(0)|}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\int_0^\pi |f'(t)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, f' est continue sur le segment $[0, \pi]$. Un théorème du cours assure alors que f' est bornée sur ce segment. Il existe donc un réel M tel que : $\forall t \in [0, \pi]$, $|f'(t)| \leqslant M$. Ainsi, d'après ce qui précède,

$$\frac{|f(\pi)|+|f(0)|}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\int_0^\pi |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{|f(\pi)|+|f(0)|}{2n+1} + \frac{M\pi}{2n+1}$$

avec :

$$\frac{|f(\pi)|+|f(0)|}{2n+1} + \frac{M\pi}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

On a donc majoré $\left|\int_0^\pi f(t)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t\right|$ par une suite qui converge vers 0.

<u>Conclusion</u> :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi f(t)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t = 0}$$

3) (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Distinguons deux cas :

<u>$k = 0$</u> : On a $J_{1,k} = \int_0^\pi B_2(\frac{t}{\pi})\,\mathrm{d}t$. En faisant le changement de variable $u = \dfrac{t}{\pi}$, $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{\pi}$, on obtient :

$$\int_0^\pi B_2\left(\frac{t}{\pi}\right)\,\mathrm{d}t = \pi\int_0^1 B_2(u)\,\mathrm{d}u = 0$$

Ainsi, $J_{1,k} = 0$ si $k = 0$.

<u>$k \in \mathbb{N}^*$</u> : les fonction $t \in [0, \pi] \longmapsto B_2\left(\dfrac{t}{\pi}\right)$ et $t \in [0, \pi] \longmapsto \dfrac{1}{2k}\sin(2kt)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. Le *théorème d'intégration par parties* assure alors que :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi B_2\left(\frac{t}{\pi}\right)\cos(2kt)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{2k}\sin(2kt)B_2\left(\frac{t}{\pi}\right)\right]_0^\pi - \frac{1}{2k\pi}\int_0^\pi B_2'\left(\frac{t}{\pi}\right)\sin(2kt)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{k\pi}\int_0^\pi B_1\left(\frac{t}{\pi}\right)\sin(2kt)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } B_2' = 2B_1.\end{aligned}$$

Comme les fonctions $t \in [0,\pi] \longmapsto B_1\left(\dfrac{t}{\pi}\right)$ et $t \in [0,\pi] \longmapsto -\dfrac{1}{2k}\cos(2kt)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, une nouvelle intégration par partie donne :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi B_1\left(\frac{t}{\pi}\right)\sin(2kt)\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{2k}\cos(2kt)B_1\left(\frac{t}{\pi}\right)\right]_0^\pi + \frac{1}{2k\pi}\int_0^\pi B_1'\left(\frac{t}{\pi}\right)\cos(2kt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{B_1(0)-B_1(1)}{2k} + \frac{1}{2k\pi}\int_0^\pi \cos(2kt)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } B_1' = B_0 = 1.\end{aligned}$$

Le lecteur pourra se convaincre que $\displaystyle\int_0^\pi \cos(2kt)\,\mathrm{d}t = 0$. De plus, on sait que $B_1(X) = X - \dfrac{1}{2}$. Donc, $B_1(0) - B_1(1) = -1$. On peut donc affirmer que

$$\int_0^\pi B_1\left(\frac{t}{\pi}\right)\sin(2kt)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2k}$$

D'après ce qui précède, on a finalement :

$$\int_0^\pi B_2\left(\frac{t}{\pi}\right)\cos(2kt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2k^2\pi}$$

Conclusion :

$$\boxed{J_{1,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ \dfrac{1}{2k^2\pi} & \text{si } k \in \mathbb{N}^* \end{cases}}$$

(b) Soit $p \in \mathbb{N}, p \geqslant 2$ et $k \in \mathbb{N}^*$. En intégrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi B_{2p}\left(\frac{t}{\pi}\right)\cos(2kt)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{2k}\sin(2kt)B_{2p}\left(\frac{t}{\pi}\right)\right]_0^\pi - \frac{1}{2k\pi}\int_0^\pi B_{2p}'\left(\frac{t}{\pi}\right)\sin(2kt)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{2p}{2k\pi}\int_0^\pi B_{2p-1}\left(\frac{t}{\pi}\right)\sin(2kt)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } B_{2p}' = 2pB_{2p-1}. \\ &= -\frac{p}{k\pi}\int_0^\pi B_{2p-1}\left(\frac{t}{\pi}\right)\sin(2kt)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

De même, en intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi B_{2p-1}\left(\frac{t}{\pi}\right)\sin(2kt)\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{2k}\cos(2kt)B_{2p-1}\left(\frac{t}{\pi}\right)\right]_0^\pi + \frac{1}{2k\pi}\int_0^\pi B_{2p-1}'\left(\frac{t}{\pi}\right)\cos(2kt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{B_{2p-1}(0)-B_{2p-1}(1)}{2k} + \frac{2p-1}{2k\pi}\int_0^\pi B_{2p-2}\left(\frac{t}{\pi}\right)\cos(2kt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2p-1}{2k\pi}\int_0^\pi B_{2p-2}\left(\frac{t}{\pi}\right)\cos(2kt)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } p \geqslant 2 \text{ et } B_{2p-1}(1) = B_{2p-1}(0). \\ &= \frac{2p-1}{2k\pi}J_{p-1,k}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{J_{p,k} = -\frac{2p(2p-1)}{(2k\pi)^2}J_{p-1,k}}$$

(c) La relation de récurrence précédente permet d'obtenir une relation entre $J_{p,k}$ et $J_{p-1,k}$. En l'écrivant de nouveau, on obtient une relation entre $J_{p,k}$ et $J_{p-2,k}$... On laisse au lecteur le soin de vérifier que pour tout $j \in [\![1\,,\, p-2]\!]$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$J_{p,k} = \frac{-2p(2p-1)}{(2k\pi)^2} \cdots \frac{-(2p-2j)(2p-2j-1)}{(2k\pi)^2} J_{p-j-1,k}$$

En particulier, pour $j = p-2$, on obtient :

$$\begin{aligned} J_{p,k} &= -\frac{2p(2p-1)}{(2k\pi)^2} \cdots \frac{-4\times 3}{(2k\pi)^2} J_{1,k} \\ &= \frac{(-1)^{p-1}(2p)!}{2(2k\pi)^{2p-2}} J_{1,k} \\ &= \frac{(-1)^{p-1}(2p)!}{2(2k\pi)^{2p-2}} \times \frac{1}{2k^2\pi} \qquad \text{d'après ce qui précède.} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{J_{p,k} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{p-1}(2p)!}{2(2k\pi)^{2p-2}} \times \dfrac{1}{2k^2\pi} & \text{si } (p,k) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ 0 & \text{si } (p \in \mathbb{N}^* \text{ et } k = 0) \text{ ou } (p = 0 \text{ et } k \in \mathbb{N}^*) \\ \pi & \text{si } p = k = 0 \end{cases} \cdot}$$

4) (a) On peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \varphi_p(t)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^\pi \frac{B_{2p}\left(\dfrac{t}{\pi}\right) - b_{2p}}{\sin(t)} \sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \left(B_{2p}\left(\frac{t}{\pi}\right) - b_{2p}\right)\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or, d'après la question **III.1**, on sait que pour tout $t \in]\,0\,,\pi\,]$,

$$\frac{\sin((2n+1)t)}{2\sin(t)} = \sum_{k=1}^n \cos(2kt) + \frac{1}{2}$$

Par *linéarité de l'intégrale*, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \varphi_p(t)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^\pi \left(B_{2p}\left(\frac{t}{\pi}\right) - b_{2p}\right)\left(2\sum_{k=1}^n \cos(2kt) + 1\right)\,\mathrm{d}t \\ &= 2\sum_{k=1}^n \int_0^\pi B_{2p}\left(\frac{t}{\pi}\right)\cos(2kt)\,\mathrm{d}t + \int_0^\pi B_{2p}\left(\frac{t}{\pi}\right)\,\mathrm{d}t - 2b_{2p}\sum_{k=1}^n \int_0^\pi \cos(2kt)\,\mathrm{d}t - b_{2p}\int_0^\pi 1\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

D'après la question **III.3**, on sait que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^\pi B_{2p}\left(\frac{t}{\pi}\right)\,\mathrm{d}t = 0,$$

et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^\pi \cos(2kt)\,\mathrm{d}t = 0.$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \varphi_p(t)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t &= 2\sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi B_{2p}\left(\frac{t}{\pi}\right)\cos(2kt)\,\mathrm{d}t - \pi b_{2p} \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} J_{p,k} - \pi b_{2p} \\
&= 2\frac{(-1)^{p-1}(2p)!}{2(2k\pi)^{2p-2}} \times \frac{1}{2k^2\pi} - \pi b_{2p} && \text{d'après } \textbf{III.3.c}. \\
&= \frac{(-1)^{p-1}(2p)!}{(2\pi)^{2p-1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2p}} - \pi b_{2p}
\end{aligned}$$

<u>Conclusion</u> : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\boxed{\int_0^\pi \varphi_p(t)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^{p-1}(2p)!}{(2\pi)^{2p-1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2p}} - \pi b_{2p}}$$

(b) Comme la fonction φ_p est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\,0\,,\pi\,]$, le résultat de la question **III.2** nous permet d'affirmer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \varphi_p(t)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t = 0$$

ceci étant vrai pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans le résultat de la question précédente, on obtient :

$$0 = \frac{(-1)^{p-1}(2p)!}{(2\pi)^{2p-1}}\zeta(2p) - \pi b_{2p}$$

C'est-à-dire que :

$$\zeta(2p) = \frac{(-1)^{p-1}b_{2p}2^{2p-1}\pi^{2p}}{(2p)!}$$

<u>Conclusion</u> :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \zeta(2p) = \frac{(-1)^{p-1}b_{2p}2^{2p-1}\pi^{2p}}{(2p)!}}$$

(c) On déduit facilement de la question précédente que :

$$\boxed{\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}}$$

IV. Irrationalité de $\zeta(2)$

1) (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition, $f_n(x) = \dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}$. On développe $(1-x)^n$ grâce à la *formule du binôme de Newton* :

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \frac{1}{n!}x^n(1-x)^n \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^k \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{n+k}
\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $n+k=k'$ dans la dernière somme, on obtient finalement que :

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{2n}(-1)^{k-n}\binom{n}{k-n}x^k$$

Remarquons que pour tout $k \in [\![n\,,\,2n]\!]$, $(-1)^{k-n}\binom{n}{k-n}$ est bien un entier.

<u>Conclusion</u> :

$$\boxed{\text{Pour tout } i \in [\![n\,,\,2n]\!] \text{, on pose : } e_i = (-1)^{i-n}\binom{n}{i-n} \text{ et on a bien : } \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{2n} e_k x^k.}$$

(b) D'après la *formule de Taylor pour les polynômes* (voir **II.5**), les coordonnées d'un polynôme (de degré $N \in \mathbb{N}$) dans la base canonique de $\mathbb{R}_N[X]$ sont $\left(\frac{P^{(k)}(0)}{k!}\right)_{0\leqslant k\leqslant N}$. D'après la question précédente, on connaît les coordonnées (dans la base canonique) du polynôme associé à la fonction polynomiale f_n. En comparant les deux expressions possibles de ces coefficients, on en déduit que :

$$f_n^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ \dfrac{1}{n!}e_k k! & \text{si } n \leqslant k \leqslant 2n \\ 0 & \text{si } k \geqslant 2n+1 \end{cases}.$$

Il suffit de vérifier que pour tout $k \in [\![n\,,\,2n]\!]$, $f_n^{(k)}(0)$ est bien un entier. Soit $k \in [\![n\,,\,2n]\!]$. D'après la question précédente, e_k est un entier. Par ailleurs, comme $k \geqslant n$, $\frac{k!}{n!}$ est également un entier. Ainsi, $f_n^{(k)}(0)$ est bien entier.

<u>Conclusion</u> :

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N},\ f_n^{(k)}(0) \text{ est entier.}}$$

(c) Il est clair que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = f_n(1-x)$. En dérivant k fois cette relation, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(k)}(x) = (-1)^k f_n^{(k)}(1-x)$$

En évaluant cette dernière relation en $x=0$, on a $f_n^{(k)}(0) = (-1)^k f_n^{(k)}(1)$. Comme $f_n^{(k)}(0)$ est entier, il en est de même de $f_n^{(k)}(1)$.

<u>Conclusion</u> :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ f_n^{(k)}(1) \text{ est entier.}}$$

2) (a) On a supposé que $\pi^2 = \frac{u}{v}$. On a :

$$F_n(0) = v^n\left(\pi^{2n}f_n(0) - \pi^{2n-2}f_n^{(2)}(0) + \pi^{2n-4}f_n^{(4)}(0) + \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(0)\right)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} F_n(0) &= v^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} f_n^{(2k)}(0) \\ &= v^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{u}{v}\right)^{n-k} f_n^{(2k)}(0) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u^{n-k} v^k f_n^{(2k)}(0) \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la dernière expression, $F_n(0)$ est une somme d'entiers (car on sait que pour tout $k \in [\![0\,,\, n]\!]$, $f_n^{(2k)}(0)$ est entier). C'est donc un entier. On raisonne de manière analogue pour montrer que $F_n(1)$ est entier.

Conclusion :

$$\boxed{F_n(0) \text{ et } F_n(1) \text{ sont entiers.}}$$

(b) Commençons par remarquer que la fonction g_n est bien dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_n'(x) = F_n''(x)\sin(\pi x) + \pi^2 F_n(x)\sin(\pi x)$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u^{n-k} v^k f_n^{(2k)}(x)$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} F_n''(x) + \pi^2 F_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u^{n-k} v^k f_n^{(2k+2)}(x) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u^{n-k+1} v^{k-1} f_n^{(2k)}(x) \\ &= -\sum_{1}^{n+1} (-1)^k u^{n-k+1} v^{k-1} f_n^{(2k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u^{n-k+1} v^{k-1} f_n^{(2k)}(x) \\ &= u^{n+1} v^{-1} f_n(x) \qquad \text{car } \forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(2n+2)}(x) = 0. \\ &= \pi^2 u^n f_n(x) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g_n'(x) = \pi^2 u^n f_n(x)\sin(\pi x)}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_n'(x) = \pi^2 u^n f_n(x)\sin(\pi x)$. En intégrant cette relation entre 0 et 1, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 g_n'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \pi^2 u^n f_n(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x \\ &= \pi^2 u^n \int_0^1 f_n(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x \\ &= \pi A_n \end{aligned}$$

Et par ailleurs, on remarque que $\int_0^1 g_n'(x)\,\mathrm{d}x = g_n(1) - g_n(0)$. Ainsi :

$$\frac{1}{\pi}\left(g_n(1) - g_n(0)\right) = A_n$$

Et un calcul simple donne : $g_n(1) - g_n(0) = \pi\left(F_n(0) + F_n(1)\right)$. Ainsi, d'après la question **IV.2**, $A_n = F_n(1) + F_n(0)$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \text{ est un entier.}}$$

3) (a) Il s'agit d'un résultat de croissances comparées. En effet, il faut se souvenir que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a^n = o(n!)$. Ainsi, la suite $\left(\frac{a^n}{n!}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. On en déduit donc qu'à partir d'un certain rang (que l'on peut noter n_0), tous les termes de la suite seront plus petit (strictement) que $\frac{1}{2}$.

Conclusion :

$$\boxed{\text{Il existe un rang } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0, \text{ on a } w_n < \frac{1}{2}.}$$

(b) Il suffit de remarquer que $\forall x \in [\,0\,,1\,]$, $x^n(1-x)^n \in [\,0\,,1\,]$. On en déduit l'encadrement :

$$\boxed{\forall x \in [\,0\,,1\,]\,,\ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{n!}}$$

(c) La fonction $x \in [\,0\,,1\,] \longmapsto f_n(x)\sin(\pi x) \in [\,0\,,1\,]$ est continue sur $[\,0\,,1\,]$, positive et n'est pas identiquement nulle. On en déduit que $A_n > 0$. Par ailleurs, d'après la question précédente, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, on a : $u^n < \frac{1}{2}n!$. Ainsi,

$$\begin{aligned} A_n &< \pi\frac{1}{2}n!\int_0^1 f_n(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x \\ &< \frac{\pi}{2}\int_0^1 \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x && \text{car } \forall x \in [\,0\,,1\,]\,,\ n!f_n(x) \leqslant 1. \\ &< 1 \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0,\ A_n \in \,]\,0\,,1\,[}$$

A la question **III.2.c**, on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n est un entier. Or, on obtient ici que pour $n \geqslant n_0$, $A_n \in \,]\,0\,,1\,[$. Mais $]\,0\,,1\,[\cap \mathbb{N} = \varnothing$. C'est absurde ! On en déduit que l'hypothèse faite sur π^2 est fausse.

Conclusion :

$$\boxed{\pi^2 \text{ est irrationnel.}}$$

(d) Comme π^2 est irrationnel, π l'est aussi. On peut raisonner par l'absurde en supposant que π^2 est irrationnel et que π est rationnel. On aurait $\pi = \frac{m}{p}$ avec m et n deux entiers non nuls et $\frac{m}{p}$ irréductible. En élevant au carré, on constate que $\pi^2 \in \mathbb{Q}$. D'où l'absurdité.

Conclusion :

$$\boxed{\pi \text{ est irrationnel.}}$$