

# IRRATIONALITÉ DE $\zeta(2)$



MATHS SUP - CONCOURS 2014

## Notations, définitions et rappels

- Pour toute fonction  $f$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $f^{(n)}$  désignera, lorsqu'elle existe, la dérivée  $n$ -ème de  $f$ . Par convention,  $f^{(0)} = f$ .
- On rappelle que l'ensemble des nombres *rationnels* est noté  $\mathbb{Q}$  et que les rationnels sont de la forme  $\frac{p}{q}$  avec  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}^*$  et où la fraction  $\frac{p}{q}$  est irréductible (ce qui s'écrit aussi  $\text{pgcd}(p, q) = 1$ ).  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  est l'ensemble des nombres *irrationnels*.

## Objectif du problème, dépendance des parties

- Le but du problème est d'établir une formule permettant de calculer les nombres  $\zeta(2p)$ , définis pour tout entier naturel  $p$  supérieur ou égal à 2 par :

$$\zeta(p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p}.$$

Le problème propose également une preuve de l'irrationalité du nombre  $\zeta(2)$ .

- La partie **I** prouve l'existence de la limite définissant  $\zeta(p)$  pour tout entier naturel  $p$  supérieur ou égal à 2. La partie **II** propose l'étude de la suite des polynômes de BERNOULLI, intervenant dans l'expression des nombres  $\zeta(2p)$  ( $p \in \mathbb{N}^*$ ). Au cours de la partie **III**, on détermine une expression de  $\zeta(2p)$  pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ . Enfin, en partie **IV**, on prouve l'irrationalité de  $\zeta(2)$ .
- Les parties **II**, **III** et **IV** sont indépendantes entre elles.

## I. Étude de la convergence de la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Dans cette partie, on considère un entier naturel  $p$  supérieur ou égal à 2 et on définit la suite  $(S_n(p))_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n(p) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p}.$$

- 1) Étudier la monotonie de la suite  $(S_n(p))_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
- 2) (a) Montrer que pour tout entier naturel  $k$  supérieur ou égal à 1,  $\frac{1}{(k+1)^p} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^p} dt \leq \frac{1}{k^p}$ .  
 (b) En déduire que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2,  $S_n(p) - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t^p} dt \leq \frac{1}{p-1}$ .  
 (c) Conclure que la suite  $(S_n(p))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge. On notera  $\zeta(p)$  sa limite.

## II. Polynômes de BERNOULLI et nombres de BERNOULLI

Dans cette partie, on note  $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. On identifie un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  à sa fonction polynomiale associée définie sur  $\mathbb{R}$ .

- 1) Soit  $f$  une fonction définie et continue sur  $[0, 1]$ , à valeurs réelles. Montrer qu'il existe une unique fonction  $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$  telle que :

$$F' = f \quad \text{et} \quad \int_0^1 F(t) dt = 0.$$

On appelle *suite de polynômes de BERNOULLI* une suite  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  définie par :

- i)  $B_0 = 1$ ,
  - ii)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, B'_n = nB_{n-1}$ ,
  - iii)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 B_n(t) dt = 0$ .
- 2) Montrer que les conditions i), ii) et iii) définissent une *unique* suite  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes de  $\mathbb{R}[X]$ . On l'appellera alors la suite des polynômes de BERNOULLI.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note :  $b_n = B_n(0)$ . On dit que  $b_n$  est le  $n$ -ème *nombre de BERNOULLI*.

- 3) Calculer  $B_1$  et  $B_2$ . En déduire  $b_1$  et  $b_2$ .
- 4) (a) Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, calculer  $B_n(1) - B_n(0)$ .  
 (b) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, B_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$ .  
 (c) Montrer alors que pour tout  $p \in \mathbb{N}^*, b_{2p+1} = 0$ .

5) (a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_n(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$ .

(b) En déduire que la suite des nombres de BERNOULLI vérifie :  $\forall p \in \mathbb{N}, p \geq 2, \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} b_{p-k} = 0$ .

(c) Montrer que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $b_{2p} = \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} b_k$ .

(d) En déduire que pour tout  $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$ , on a :

$$b_{2p} = -\frac{1}{(2p+2)(2p+1)} \sum_{k=0}^{2p-2} \binom{2p+2}{k} b_k.$$

Ces dernières relations permettent de calculer les nombres de BERNOULLI par récurrence. Elles permettent également de prouver que les nombres de BERNOULLI sont *rationnels*.

### III. Calcul de $\zeta(2p)$

1) Pour tout  $t \in ]0, \pi]$ , calculer  $\sum_{k=1}^n \cos(2kt)$ , puis déterminer une constante réelle  $\lambda$  telle que :

$$\forall t \in ]0, \pi], \frac{\sin((2n+1)t)}{2 \sin(t)} = \sum_{k=1}^n \cos(2kt) + \lambda.$$

2) Montrer que pour toute fonction  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, \pi]$  on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) \sin((2n+1)t) dt = 0.$$

Pour tout couple  $(p, k)$  d'entiers naturels, on définit  $J_{p,k} = \int_0^\pi B_{2p}\left(\frac{t}{\pi}\right) \cos(2kt) dt$ .

3) (a) A l'aide de deux intégrations par parties, calculer  $J_{1,k}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

(b) Pour  $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$ , trouver une relation entre  $J_{p,k}$  et  $J_{p-1,k}$ .

(c) En déduire l'expression de  $J_{p,k}$  en fonction de  $p$  et de  $k$  pour tout  $(p, k) \in \mathbb{N}^2$ .

Dans la suite, on considère un entier  $p \in \mathbb{N}^*$  fixé et on définit la fonction  $\varphi_p : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\varphi_p(0) = 0, \varphi_p(\pi) = 0 \text{ et } \forall t \in ]0, \pi[, \varphi_p(t) = \frac{B_{2p}\left(\frac{t}{\pi}\right) - b_{2p}}{\sin(t)}.$$

Il est **admis** dans la suite du problème que la fonction  $\varphi_p$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, \pi]$ .

4) (a) Donner une expression de  $\int_0^\pi \varphi_p(t) \sin((2n+1)t) dt$  en fonction de  $n, p$  et de  $b_{2p}$ .

(b) En déduire la valeur de  $\zeta(2p)$  en fonction de  $p$  et de  $b_{2p}$ .

(c) Donner les valeurs de  $\zeta(2)$  et  $\zeta(4)$ .

En 1882, LINDEMANN démontra que  $\pi$  est *transcendant*. C'est-à-dire que  $\pi$  n'est racine d'aucun polynôme (non nul) à coefficients rationnels. Ce résultat a permis de prouver que tous les nombres  $\zeta(2n)$  sont irrationnels. Le premier résultat concernant les  $\zeta(2n+1)$  n'est arrivé qu'en 1978, lorsque APÉRY démontra que  $\zeta(3)$  est irrationnel. Il aura fallu plus d'un siècle pour obtenir un résultat concernant l'irrationalité des  $\zeta(2n+1)$ . Ces nombres restent encore très mystérieux à l'heure actuelle. En 2001, ZUIDILIN a montré qu'au moins un nombre parmi  $\zeta(5)$ ,  $\zeta(7)$ ,  $\zeta(9)$  et  $\zeta(11)$  est irrationnel.

## IV. Irrationalité de $\zeta(2)$

Dans cette partie,  $n$  désigne un entier naturel non nul et pour tout  $x$  réel, on pose  $f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$ .

1) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(a) Montrer qu'il existe  $n+1$  entiers  $e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n}$  tels que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=n}^{2n} e_i x^i$ .

(b) Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f_n^{(k)}(0)$  est entier.

(c) En remarquant que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = f_n(1-x)$ , montrer que  $f_n^{(k)}(1)$  est entier.

On veut prouver que  $\pi^2$  est irrationnel. On va raisonner par l'absurde : supposons qu'il existe deux entiers  $u$  et  $v$  tels que la fraction  $\frac{u}{v}$  soit irréductible (c'est-à-dire tels que  $\text{pgcd}(u, v) = 1$ ) tels que  $\pi^2 = \frac{u}{v}$ .

2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit la fonction  $F_n$  sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = v^n \left( \pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) + \dots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x) \right).$$

(a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $F_n(0)$  et  $F_n(1)$  sont des entiers.

(b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $g_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_n(x) = F_n'(x) \sin(\pi x) - \pi F_n(x) \cos(\pi x).$$

Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, g_n'(x) = \pi^2 u^n f_n(x) \sin(\pi x)$ .

(c) Établir que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A_n = \pi u^n \int_0^1 f_n(x) \sin(\pi x) dx$  est un entier.

Dans la suite, on note  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{u^n}{n!}$ .

3) (a) Montrer qu'il existe un entier naturel  $n_0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, w_n < \frac{1}{2}$ .

(b) Montrer que pour tout  $x \in [0, 1], 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n!}$ .

(c) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, A_n \in ]0, 1[$ , puis que  $\pi^2$  est irrationnel. Conclure quant à l'irrationalité de  $\zeta(2)$ .

(d) Peut-on déduire de ce qui précède l'irrationalité de  $\pi$  ?