

24. La fonction ζ de Riemann

Maths SPE - Filières MP/MP* et PSI/PSI*

OPTIMALPREPA - Concours 2013

Dans tout le problème, on note I l'intervalle $]1, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne alors par f_n la fonction définie sur I par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I, f_n(x) = \frac{1}{n^x}.$$

On considère alors la fonction ζ définie par :

$$\forall x \in I, \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

Dans tout le problème, on pourra utiliser sans les démontrer les résultats classiques : $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

Partie I. Propriétés générales de la fonction ζ

- 1) Après avoir vérifié que la fonction ζ est bien définie sur I , déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.
- 2) a) Que peut-on dire de la série de fonctions $\sum f_n$?
b) En déduire la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- 3) Montrer que ζ est de classe C^∞ sur I et déterminer ses dérivées successives.
- 4) Dresser la courbe représentative de ζ .

Partie II. Etude générale de convexité

- 1) Justifier que ζ est convexe sur I .
- 2) On s'intéresse à la fonction f définie sur I par :

$$\forall x \in I, f(x) = \ln(\zeta(x)).$$

a) Montrer que :

$$\forall x \in I, f''(x) = \frac{1}{\zeta^2(x)} \left[\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n)^2 n^{-x} \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-x} \right) - \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-\ln n) n^{-x} \right)^2 \right].$$

b) En déduire que f est convexe sur I .

3) Etablir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \Gamma(x+1)\zeta(x+1) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1} dt.$$

4) On s'intéresse désormais à la fonction g définie sur I par :

$$\forall x \in I, g(x) = \Gamma(x)\zeta(x).$$

Prouver, à l'aide d'une extension du théorème de dérivation sous le signe intégral, que g est convexe sur I .

Partie III. Valeurs remarquables de certaines intégrales à l'aide des fonctions Γ et ζ

L'objectif de cette partie est de déterminer quelques valeurs remarquables de la fonction ζ .

1) a) Etablir avec précision que : $\int_0^{+\infty} \frac{u^2}{e^{u^2}-1} du = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \zeta\left(\frac{3}{2}\right).$

b) Déterminer également une expression simple de : $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\ln(1+u)}{u}\right)^2 du.$

2) a) A l'aide du théorème de comparaison série-intégrale, montrer que : $(\zeta(x) - 1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2^x}.$

b) En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t(e^t-1)} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(x)}{2^x}.$$

3) On appelle T la fonction définie sur I par :

$$\forall x \in I, T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

a) Etudier la nature de la série $\sum \int_0^{+\infty} |f(t)| dt.$

b) Prouver que :

$$\forall x \in I, \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(e^t+1)} dt = -\Gamma(x)T(x).$$

4) a) Montrer que :

$$\forall x \in I, \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{\text{sh } t} dt = \left(2 - \frac{1}{2^{x-1}}\right) \zeta(x) \Gamma(x).$$

b) En déduire la valeur des intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{t}{\text{sh } t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\text{sh } t} dt.$