Chapitre 24.
Suites et séries de fonctions

Maths SPE - Filières MP/MP* et PSI/PSI*

***OPTIMAL**PREPA* **- Concours 2013**

Fiche méthodologique

Attention... Ne jamais écrire de somme infinie tant que la convergence de la série n'a pas été démontrée.

0. Apprendre et comprendre son cours

Se souvenir qu'avant d'évoquer la convergence d'une suite ou d'une série de fonctions, il faut préciser (ou que l'énoncé ait précisé) la norme choisie. En effet, les espaces vectoriels des fonctions couramment utilisés sont le plus souvent de dimension infinie, et toutes les normes n'y sont pas équivalentes. On travaille le plus souvent sur l'espace vectoriel des fonctions bornées sur un intervalle I et à valeurs réelles, muni de la norme infinie.

I. Etudier une suite de fonctions

1. Montrer qu'une suite de fonctions converge simplement sur une partie, et déterminer sa limite simple

Pour montrer qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur une partie A, on peut :

- se ramener à la définition, en montrant que pour tout $x\in A$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une quantité notée f(x). La fonction f est alors la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur A,
- montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f (condition suffisante pour obtenir la convergence simple) : alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également simplement vers f.

2. Montrer qu'une suite de fonctions converge uniformément sur une partie, et déterminer sa limite uniforme

Penser que pour qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur une partie A, il est nécessaire qu'elle converge simplement sur cette partie. Une fois cette condition vérifiée et une fois déterminée la limite simple f de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur A, pour montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A, on peut se ramener à la définition, et ainsi **successivement** :

– dresser sur A le tableau de variations de la fonction $f - f_n$ ($n\in\mathbb{N}$),

– montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f - f_n$ admet sur A une borne supérieure pour la norme infinie, et que cette borne supérieure tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

3. Montrer qu'une suite de fonctions converge simplement sur une partie, mais non uniformément, vers une fonction f

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convergeant simplement sur A vers une fonction f. Pour montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur A, on peut :

- montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f - f_n$ n'est pas bornée,
- si à partir d'un certain rang, les fonctions $f - f_n$ sont bornées, montrer que la quantité $\|f - f_n\|_\infty$ ne converge pas vers 0 lorsque n tend vers l'infini,

■ montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est continue sur A mais que f n'est pas continue sur A : en effet, la limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur A est continue sur A ; ainsi à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, si f n'est pas continue sur A alors que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger uniformément vers f sur A.

II. Etudier une série de fonctions

1. Montrer qu'une série de fonctions converge simplement sur une partie, et déterminer sa fonction somme

Pour montrer qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur une partie A, et déterminer sa fonction somme, on peut **successivement** :

– introduire la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur A par : $\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in A,\ S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$,

– montrer que la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur A et déterminer sa limite simple S : on se ramène alors à l'étude de la convergence simple d'une suite de fonctions : cf. point **I.1** ci-dessus.

On peut également montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément (ou normalement) sur A de somme S.

2. Montrer qu'une série de fonctions converge uniformément sur une partie, et déterminer sa fonction somme

Pour montrer qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur une partie A, et déterminer sa fonction somme, on peut **successivement** :

– introduire la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur A par : $\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in A,\ S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$,

– vérifier que la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur A et déterminer sa limite simple S (cf. point **II.1** ci-dessus),

– montrer que la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers S, i.e. que la quantité $\|S - S_n\|_\infty$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini : cf. point **I.2** ci-dessus. On introduit ici en fait la suite des restes de la séries de fonctions $\sum f_n$. Pour étudier cette suite des restes, on peut alors se ramener à la fiche méthodologique du chapitre "**Séries réelles ou complexes**", en particulier au théorème des séries alternées.

On peut également montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur A.

3. Montrer qu'une série de fonctions converge normalement sur une partie, et déterminer sa fonction somme

Pour montrer qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur une partie A, et déterminer sa fonction somme, on peut **successivement** :

■ montrer que pour tout entier naturel n, la fonction f_n est bornée,

■ montrer que la série réelle $\sum \|f_n\|_\infty$ converge. Attention : cette série n'est pas une série de fonctions mais une série à termes réels (positifs). Pour étudier cette série, on peut alors se ramener à la fiche méthodologique du chapitre "**Séries réelles ou complexes**".

III. Dériver, intégrer la limite d'une suite de fonctions

Se souvenir que "la dérivée de la limite n'est pas toujours égale à la limite de la dérivée". De même, "la limite de l'intégrale n'est pas toujours égale à l'intégrale de la limite" (même si l'on se place sur un segment). En ce qui concerne la dérivation, les conditions sont les mêmes suivant qu'il s'agit d'un segment ou d'un intervalle quelconque ; en ce qui concerne l'intégration, il convient de distinguer les deux cas.

1. Dériver la limite d'une suite de fonctions (quel que soit l'intervalle considéré)

Considérons une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ simplement convergente sur un intervalle I vers une fonction f. Pour dériver la limite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur [a, b], i.e. pour écrire que : $\forall x\in I, f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$, on peut montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur tout segment** inclus dans I vers f.

2. Intégrer la limite d'une suite de fonctions sur un segment

Considérons une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ simplement convergente sur un segment [a, b] vers une fonction f. Pour intégrer la limite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur [a, b], i.e. pour écrire que : $\int_a^b f = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n$, on peut montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **uniformément** vers f sur [a, b].

3. Intégrer la limite d'une suite de fonctions sur un intervalle quelconque

Considérons une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ simplement convergente sur un intervalle quelconque I vers une fonction f. Pour intégrer la limite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur I, i.e. pour écrire que : $\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$, on peut utiliser le **théorème de convergence dominée**, i.e., après avoir prouvé que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ simplement convergente sur I vers f, montrer qu' il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I, telle que pour tout entier naturel n, $|f_n| \leq \varphi$ (hypothèse de domination).

IV. Dériver, intégrer terme à terme la fonction somme d'une série de fonctions

Se souvenir que "l'intégrale d'une somme infinie n'est pas toujours égale à la somme infinie des intégrales" (même si l'on se place sur un segment). En ce qui concerne la dérivation, les conditions sont les mêmes suivant qu'il s'agit d'un segment ou d'un intervalle quelconque ; en ce qui concerne l'intégration, il convient de distinguer les deux cas.

1. Dériver terme à terme la fonction somme d'une série de fonctions (quel que soit l'intervalle considéré)

Considérons une série de fonctions $\sum f_n$ convergeant simplement sur un intervalle I, de fonction somme f. Pour intégrer terme à terme la somme de la série de fonctions $\sum f_n$, et écrire que : $D\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} D(f_n)$, on peut montrer que la série fonctions $\sum f_n'$ **converge uniformément sur tout segment** inclus dans I.

2. Intégrer terme à terme la fonction somme d'une série de fonctions sur un segment

Considérons une série de fonctions $\sum f_n$ convergeant simplement sur [a, b]. Pour intégrer terme à terme la somme de la série de fonctions $\sum f_n$, et écrire que : $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, on peut montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge **uniformément** sur [a, b].

3. Intégrer terme à terme la fonction somme d'une série de fonctions sur un intervalle quelconque.

Considérons une série de fonctions $\sum f_n$ convergeant simplement sur un intervalle quelconque I, de somme f. Pour intégrer terme à terme la somme de la série de fonctions $\sum f_n$, et écrire que : $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. on peut montrer que f est continue par morceaux sur I, et que la série réelle $\sum \int_I |f_n|$ converge.

Remarque : veiller à ne pas oublier la valeur absolue dans l'application de ce théorème.

V. Utiliser des approximations uniformes de fonctions

Se souvenir des deux théorèmes de Weierstrass :

- le premier théorème de Weierstrass permet d'étendre à une fonction continue quelconque une propriété valable pour les fonctions polynomiales, par passage à la limite ;
- le théorème de Weierstrass trigonométrique permet d'étendre à une fonction continue quelconque une propriété valable pour les fonctions polynômes trigonométriques, par passage à la limite.