Chapitre 24. Suites et séries de fonctions

Maths SPE - Filières MP/MP* et PSI/PSI*

***OPTIMAL**PREPA* **- Concours 2013**

Fiche de cours

Dans tout le cours, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(E, \|.\|)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie (donc complet), A désigne une partie de E et $\|.\|_\infty$ (notée également N_∞) est la norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$, i.e. la norme définie par : $\forall f \in \mathcal{B}(A, \mathbb{K}), \|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|$.

Lorsque $E = \mathbb{R}$ et et que les propriétés portent sur un intervalle I (resp. [a, b]), on supposera *mutantis mutandis* A = I (resp. A = [a, b]) et la norme de la convergence uniforme définie sur cet ensemble.

I. Modes de convergence

1. Convergence simple

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

A. Cas d'une suite de fonctions

▪ ***Définition.*** On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur A s'il existe une fonction f définie sur A et à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que : $\forall x \in A, \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$.

▪ ***Unicité de la limite.*** Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur A, alors il existe une unique fonction f définie sur A et à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que : $\forall x \in A, \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$. Cette fonction est appelée la limite simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et on dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur A vers f.

B. Cas d'une série de fonctions

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur A si la suite des sommes partielles associée (qui est une suite de fonctions) converge simplement sur A. La limite simple de cette suite de fonctions est appelée la somme, ou fonction somme, de la série de fonctions $\sum f_n$.

2. Convergence uniforme

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

A. Cas d'une suite de fonctions

▪ ***Définition.*** On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur A s'il existe une fonction f définie sur A et à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que : $\lim_{n \to +\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$.

Remarque : cette notation suppose qu'à partir d'un certain rang r ($r \in \mathbb{N}$), les fonctions $f - f_n$ ($n \geq r$) soient bornées.

▪ ***Unicité de la limite.*** Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur A, alors il existe une unique fonction f définie sur A et à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que : $\lim_{n \to +\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$. Cette fonction est appelée la limite uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et on dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers f.

■ ***CVU ⇒ CVS***. Soit $f \in \mathcal{B}(A, \mathbb{K})$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers f, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur A vers f. La réciproque est fausse.

■ Soit f une fonction définie sur A et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers f et si pour tout entier naturel n, f_n est bornée sur A, alors f est bornée sur A.

■ Soient f une fonction définie sur A et à valeurs dans $\mathbb{K}$, et $a \in A$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers f et si pour tout entier naturel n, f_n est continue en a, alors f est continue en a.

■ Soient f une fonction définie sur A et à valeurs dans $\mathbb{K}$, a un point adhérent à A (le cas échéant égal à $+\infty$ ou $-\infty$ si A est une partie non bornée de $\mathbb{R}$), et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers f et si pour tout entier naturel n, f_n admet b_n pour limite en a, alors la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et en notant b sa limite, f admet b pour limite en a.

B. Cas d'une série de fonctions

■ On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A si la suite des sommes partielles qui lui est associée (qui est une suite de fonctions) converge uniformément sur A.

■ ***CVU ⇒ CVS***. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A, alors elle converge simplement sur A. La réciproque est fausse.

3. Convergence normale d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions appartenant à $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$.

■ ***Définition.*** On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur A si la série réelle $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

■ ***CVN ⇒ CVU + ACV.*** Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur A, alors elle converge uniformément sur A. De plus, elle est alors absolument convergente sur A. On a alors :

$$N_\infty\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} N_\infty(f_n).$$

4. Cas des applications à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie

Toutes les notions précédentes s'étendent aux suites et séries d'applications définiees sur une partie A de E à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie. En particulier, si $\mathcal{A}$ est une algèbre normée de dimension finie :

■ La fonction $u \mapsto (1-u)^{-1}$ est continue sur la boule unité ouverte $\mathcal{B}_o(0, 1)$.

■ La fonction $u \mapsto \exp u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$ est continue sur $\mathcal{A}$.

II. Liens avec l'intégration : cas d'un intervalle compact

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et a et b deux réels tels que $a < b$ et $[a, b] \subset I$.

1. Convergence en moyenne, en moyenne quadratique

■ ***Convergence en moyenne.*** On note N_1 l'application définie sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ par : $\forall f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, $N_1(f) = \int_a^b |f|$. N_1 est une norme sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ appelée norme de la convergence en moyenne.

Soit alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur [a, b] et à valeurs dans $\mathbb{K}$, continues sur [a, b]. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne sur [a, b] s'il existe une fonction f définie sur [a, b] et à valeurs dans $\mathbb{K}$, continue sur [a, b], telle que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour la norme N_1, i.e. telle que : $\lim_{n\to+\infty} N_1(f_n - f) = 0$.

■ ***Convergence en moyenne quadratique.*** On note N_2 l'application définie sur $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{K})$ par : $\forall f \in \mathscr{C}([a, b], \mathbb{K})$, $N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f|^2}$. N_2 est une norme sur $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{K})$ appelée norme de la convergence en moyenne quadratique.

Soient alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, continues sur $[a, b]$ et f une fonction définie sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, continue sur $[a, b]$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique sur $[a, b]$ s'il existe une fonction f définie sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, continue sur $[a, b]$, telle que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour la norme N_2, i.e. telle que : $\lim_{n\to+\infty} N_2(f_n - f) = 0$.

■ ***Propriétés.*** Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, continue sur $[a, b]$. On a :

- $\left|\int_a^b f\right| \le N_1(f) \le (b-a)N_\infty(f)$,
- $N_2(f) \le \sqrt{b-a}\, N_\infty(f)$,
- $N_1(f) \le \sqrt{b-a}\, N_2(f)$.

2. Intégration d'une limite uniforme d'une suite de fonctions continues

■ Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, continues sur $[a, b]$, et f une fonction définie sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, continue sur $[a, b]$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$, alors f est continue sur $[a, b]$ et on a :

$$\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n.$$

■ ***Comparaison des modes de convergence.***

- Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers f sur $[a, b]$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne vers f sur $[a, b]$.
- Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers f sur $[a, b]$, et donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne vers f sur $[a, b]$.

■ Soit f une application continue par morceaux sur I et h une primitive de f. On a :

$$N_\infty(h) \le \|h(a)\| + \int_a^b \|f\|.$$

■ Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, continues sur I, f une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, continue sur I, $a\in I$, pour tout entier naturel n, h_n l'unique primitive de f_n s'annulant en a, et h la primitive de f qui s'annule en a.

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment de I, alors $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers h sur tout segment de I.

3. Intégration terme à terme d'une série de fonctions continues uniformément convergente

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, continues sur $[a, b]$.

■ Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors la série $\sum \int_a^b f_n$ converge. On a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n.$$

■ Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, b]$, alors la série réelle $\sum N_1(f_n)$ converge. On a alors :

$$N_1\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) \le \sum_{n=0}^{+\infty} N_1(f_n).$$

III. Liens avec la dérivation

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et a et b deux réels tels que $a < b$ et $[a, b] \subset I$.

1. Dérivation de la limite d'une suite de fonctions

■ Soient f une fonction continue par morceaux sur [a, b] et h une primitive de f sur [a, b]. On a :
$N_\infty(h) \leq \|h(a)\| + \int_a^b \|f\|$.

■ Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, de classe C^1 sur I, et f une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I et si $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction h, alors f est de classe C^1 sur I et : $\forall x\in I, f'(x) = h(x)$. On a alors :

$\forall x\in I, \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x)$.

2. Dérivation terme à terme d'une série de fonctions

■ Soit f une application de classe C^1 sur I. On a :
$N_\infty(f) \leq \|f(a)\| + \int_a^b \|f'\|$.

■ Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, de classe C^1 sur I. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I et si la série fonctions $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I, alors la fonction somme de la série $\sum f_n$ est de classe C^1 sur I, et :

$$D\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} D(f_n).$$

3. Cas des applications à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie

Toutes les notions précédentes s'étendent aux suites et séries d'applications définiees sur une partie A de E à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie. En particulier, si A est une algèbre normée de dimension finie et si a est un élément de A, la fonction $e_a : t \mapsto \exp(ta) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(ta)^n}{n!}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et : $D(e_a) = ae_a = e_a a$.

Exemples usuels :

- Si $z\in\mathbb{C}$, l'application $e_z : t \mapsto \exp(tz)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\forall t\in\mathbb{R}, e_z'(t) = t \exp tz = te_z(t)$.
- Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et si $f\in\mathcal{L}(E)$, l'application $e_f : t \mapsto \exp(tf)= \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(tf)^n}{n!}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et :
$\forall t\in\mathbb{R}, e_f'(t) = t\exp tf = te_f(t)$.
- Si M est une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{K}$, l'application $e_M : t \mapsto \exp(tM)= \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(tM)^n}{n!}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et :
$\forall t\in\mathbb{R}, e_M'(t) = t\exp tM = te_M(t)$.

IV. Liens avec l'intégration : cas d'un intervalle quelconque

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

1. Intégration d'une limite simple d'une suite de fonctions dominée par une fonction intégrable

■ ***Théorème de convergence dominée.*** Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, continues par morceaux sur I. Si les deux conditions suivantes sont réunies :

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I,

• il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I, telle que pour tout entier naturel n, $|f_n| \leq \varphi$ (hypothèse de domination),

alors les fonctions f_n ($n \in \mathbb{N}$) et f sont intégrables sur I, et :

$$\int_I f = \lim_{n \to +\infty} \int_I f_n.$$

2. Intégration terme à terme d'une série de fonctions

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, continues par morceaux et intégrables sur I. Si les deux conditions suivantes sont réunies :

• la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement, et a pour somme une fonction f continue par morceaux sur I,

• la série réelle $\sum \int_I |f_n|$ converge,

alors f est intégrable sur I, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n.$$

V. Approximation des fonctions d'une variable réelle

Soient a et b deux réels tels que a < b et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Fonctions en escalier. Fonctions continues par morceaux. Fonctions affines par morceaux.

■ ***Fonction en escalier.*** Soit f une fonction définie sur [a, b] et à valeurs dans F. f est en escalier s'il existe une suite finie $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) strictement croissante de points de [a, b] avec $x_0 = a$ et $x_n = b$ tels que, pour tout $i \in [0, n-1]$, f soit constante sur $]x_i, x_{i+1}[$.

■ On note $\mathscr{E}([a, b], F)$, l'ensemble des fonctions en escalier sur [a, b] et à valeurs dans F. $\mathscr{E}([a, b], F)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{F}([a, b], F), +, .)$ et un sous-anneau (commutatif) de $(\mathscr{F}([a, b], F), +, \times)$.

■ ***Fonction affine par morceaux.*** Soit f une fonction définie sur [a, b] et à valeurs dans F. f est affine par morceaux sur [a, b] s'il existe une suite finie $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) strictement croissante de points de [a, b] avec $x_0 = a$ et $x_n = b$ tels que, pour tout $i \in [0, n-1]$, la restriction de f à $[x_i, x_{i+1}]$ soit une fonction affine.

■ ***Fonction continue par morceaux.*** Soit f une fonction définie sur [a, b] et à valeurs dans F. f est continue par morceaux sur [a, b] s'il existe une suite finie $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) strictement croissante de points de [a, b] avec $x_0 = a$ et $x_n = b$ tels que, pour tout $i \in [0, n-1]$, la restriction de f à $]x_i, x_{i+1}[$ soit continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ et prolongeable par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$.

Remarque : lorsque f est définie sur un intervalle I quelconque, on dit que f est affine (resp. continue) par morceaux sur I si sa restriction à tout segment inclus dans I est affine (resp. continue) par morceaux sur ce segment.

■ On note $\mathscr{M}([a, b], F)$, l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur [a, b] et à valeurs dans F. $\mathscr{M}([a, b], F)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{F}([a, b], F), +, .)$ et un sous-anneau (commutatif) de $(\mathscr{F}([a, b], F), +, \times)$.

■ ***Subdivision d'un segment subordonnée à une fonction.*** Soit f une fonction définie et continue par morceaux sur [a, b] et à valeurs dans F. On appelle subdivision de [a, b] subordonnée à f (ou adaptée à f) toute suite finie $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) strictement croissante de points de [a, b] avec $x_0 = a$ et $x_n = b$ tels que, pour tout $i \in [0, n-1]$, la restriction de f à $]x_i, x_{i+1}[$ soit continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ et prolongeable par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$.

2. Approximations uniformes de fonctions

■ Toute fonction f définie sur [a, b] et à valeurs dans F, continue par morceaux sur [a, b], est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur [a, b].

■ Toute fonction f définie sur [a, b] et à valeurs dans F, continue sur [a, b], est la limite uniforme d'une suite de fonctions affines par morceaux sur [a, b].

▪ ***Premier théorème de Weierstrass.*** Toute fonction f définie sur [a, b] et à valeurs dans $\mathbb{K}$, continue sur [a, b], est la limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur [a, b].

▪ ***Définition.*** On appelle fonction polynomiale trigonométrique (ou polynôme trigonométrique) de période T ($T \in \mathbb{R}_+^*$), toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes, périodique de période T et définie comme combinaison linéaire (à coefficients complexes) des fonctions trigonométriques réelles $x \mapsto \cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$ et $x \mapsto \sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$, i.e. de la forme : $x \mapsto \sum_{k=-p}^{p} a_k e^{ik\omega x}$, où $p \in \mathbb{N}$, $(a_k)_{-p \le k \le p} \in \mathbb{C}^{2p+1}$, et $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

▪ ***Théorème de Weierstrass trigonométrique.*** Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, continue sur $\mathbb{R}$, périodique sur $\mathbb{R}$ de période T ($T \in \mathbb{R}_+^*$), est la limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions polynômes trigonométriques (complexes) de période T.

VI. Programme officiel

Hors programme :

- Démonstration du théorème de convergence dominée.
- Démonstration du théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions dans le cas d'un intervalle quelconque.
- Démonstration des théorèmes de Weierstrass.

A la limite du programme :

- Extension des théorèmes de dérivation de la limite d'une suite de fonctions et de la fonction somme d'une série de fonctions au cas de dérivations successives.