24. La fonction ζ de Riemann

CORRECTION

Maths SPE - Filières MP/MP* et PSI/PSI*

***OPTIMAL**PREPA* **- Concours 2013**

Notation : dans toute la correction, on convient de noter, pour toute partie A de I, $\|.\|_\infty^A$ la norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$, i.e. la norme définie sur $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$ par : $\forall f \in \mathcal{B}(A, \mathbb{K}), \|f\|_\infty^A = \sup_{x\in A} |f(x)|$.

Partie I. Propriétés générales de la fonction ζ

1) ▪ Soit $x \in I$. Comme $x > 1$, la série de terme général $\frac{1}{n^x}$ converge (série de Riemann), donc :

$$\boxed{\zeta \text{ est bien définie sur } I}$$

▪ Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Comme : $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = +\infty$, alors d'après la définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} > A$.

De plus, en effectuant une limite terme à terme dans une somme finie, on peut écrire :

$\lim_{x\to 1} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ et donc, comme $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} > A$:

$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in]1, 1+\eta[, \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} > A$ d'où, comme : $\forall n > N, \forall x \in]1, 1+\eta[, \frac{1}{n^x} \geq 0$:

$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in]1, 1+\eta[, \zeta(x) > A$.

Ce résultat étant valable pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, on peut conclure :

$$\boxed{\lim_{x\to 1} \zeta(x) = +\infty}$$

2) a) ▫ D'après la question **I.1**, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I, et comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est à valeurs positives, la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I.

▫ Recherchons une éventuelle convergence normale sur I. En notant, pour toute partie A de I et pour toute fonction f bornée sur I, $\|f\|_\infty^A = \sup_{x\in A} |f(x)|$, on peut écrire, les fonctions f_n ($n \in \mathbb{N}$) étant décroissantes sur I :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_\infty^I = \frac{1}{n}.$

Comme la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série de Riemann), la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur I.

❑ Etudions désormais une éventuelle convergence uniforme sur I.

(i) Première méthode : en notant $(R_N)_{N\in\mathbb{N}}$ la suite des restes de la série de fonctions $\sum f_n$, on peut écrire :

$\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et donc :

$\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, R_N(x) \geq \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n^x}$ d'où, la suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ $(x \in \mathbb{R})$ étant décroissante et la somme comportant N termes :

$$\geq \frac{N}{(2N)^x}.$$

Si la série de fonctions $\sum f_n$ convergeait uniformément sur I, on aurait alors :

$\forall N \in \mathbb{N}, \|R_N\|_\infty^I \geq \frac{N}{2N}$ i.e. :

$\forall N \in \mathbb{N}, \|R_N\|_\infty^I \geq \frac{1}{2}.$

Or : $\lim_{N\to+\infty} \|R_N\|_\infty^I = 0$,.On aboutit à une contradiction et on conclut ainsi que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur I.

(ii) Deuxième méthode : supposons que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x\to 1} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n}$, alors d'après le théorème de la limite terme à terme, la série $\sum \frac{1}{n}$ serait convergente (et on aurait : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{x\to 1} \zeta(x)$). On aboutit à une contradiction, ce qui permet de conclure que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur I.

❑ Etudions désormais une éventuelle convergence normale sur tout compact inclus dans I. Soit alors $a \in I$. On peut écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_\infty^{[a,+\infty[} = \frac{1}{n^a}.$

Comme la série $\sum \frac{1}{n^a}$ converge (série de Riemann, a > 1), la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, absolument, simplement, sur $[a, +\infty[$.

On peut désormais conclure :

La série de fonctions $\sum f_n$ converge :
– absolument, donc simplement ; mais pas uniformément (ni normalement) sur I
– normalement, donc uniformément, absolument, simplement, sur tout compact inclus dans I

b) Comme : $\forall n \geq 2, \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{n^x} = 0$, comme : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1^x} = 1$, et comme la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement (et donc uniformément) sur $[2, +\infty[$ (par exemple), alors d'après le théorème de la limite terme à terme, on peut conclure :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \zeta(x) = 1}$$

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On peut écrire :

□ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^k sur I, et :

$\forall i \in [\![1, k]\!], \forall x \in I, f_n^{(i)}(x) = \frac{(-\ln n)^i}{n^x}$. ①

□ La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I. ②

□ Soit $\alpha \in]1, a[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$ et pour tout $a \in I$, $\|f_n^{(i)}\|_\infty^{[a,+\infty[} = \frac{(\ln n)^i}{n^a}$. Comme : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 \|f_n^{(i)}\|_\infty^{[a,+\infty[} = 0$ et comme la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge (série de Riemann, $\alpha > 1$), les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs permettent de conclure que la série de fonctions $\sum f_n^{(i)}$ converge normalement (dont uniformément) sur tout compact inclus dans I. ③

□ D'après ①, ② et ③ et l'extension du théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions uniformément convergente, on en déduit ainsi que ζ est de classe C^k sur I, avec :

$\forall x \in I, \zeta^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}$.

On peut désormais conclure, ce résultat étant valable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et le cas $k = 0$ rejoignant le cas général :

$$\boxed{\zeta \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur I, et : } \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}}$$

4) D'après la question précédente :

$\forall x \in I, \zeta'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)}{n^x}$ et donc :

$\forall x \in I, \zeta'(x) < 0$.

Ainsi, ζ est strictement décroissante sur I. De même :

$$\forall x \in I, \zeta''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^x} \qquad \text{et donc :}$$

$\forall x \in I, \zeta''(x) > 0.$

Ainsi, ζ est convexe sur I. Comme : $\lim_{x \to +\infty} \zeta(x) = 1$, et comme : $\lim_{x \to 1} \zeta(x) = +\infty$, on peut désormais tracer l'allure de la courbe représentative de ζ.

$\boxed{\text{Courbe représentative de } \zeta \text{ : cf. feuille annexe ci-jointe}}$

Partie II. Etude générale de convexité

1) D'après l'étude effectuée à la question **I.4** :

$$\boxed{\zeta \text{ est convexe sur I}}$$

2) **a)** f est de classe C^2 sur I en tant que composée de la fonction ζ, de classe C^2 sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et de la fonction ln de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, et l'on a :

$$\forall x \in I, f'(x) = \frac{\zeta'(x)}{\zeta(x)} \qquad \text{d'où :}$$

$$\forall x \in I, f''(x) = \frac{\zeta''(x)\zeta(x) - (\zeta'(x))^2}{\zeta^2(x)} \qquad \text{et donc, d'après le résultat de la question } \mathbf{I.3} \text{ :}$$

$$\boxed{\forall x \in I, f''(x) = \frac{1}{\zeta^2(x)} \left[\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n)^2 n^{-x} \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-x} \right) - \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-\ln n) n^{-x} \right)^2 \right]}$$

b) Soit E l'ensemble des suites indexées sur $\mathbb{N}^*$ et de carré sommables (i.e. l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que la série de terme général u_n^2 converge). D'après le cours, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit alors φ l'application définie sur E^2 par $(u, v) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n v_n$. D'après le cours, φ est un produit scalaire sur E. On peut alors écrire, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (u, v) \in E^2, \varphi(u, v)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2 \qquad \text{soit :}$$

$$\forall (u, v) \in E^2, \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n v_n \right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2 \right). \qquad ①$$

Soient alors $x \in I$ et $u(x)$ et $v(x)$ les suites définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} u_n(x) = (-\ln n) n^{-x/2} \\ v_n(x) = n^{-x/2} \end{cases}$. Comme : $\lim_{n \to +\infty} n^2 u_n(x)^2 = 0$ et comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann, $2 > 1$), d'après les critères de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum (u_n(x))^2$ converge. De même, la série $\sum (v_n(x))^2$ converge. Ainsi, u(x) et v(x) appartiennent à E. En appliquant la relation ① aux suites u(x) et v(x), on peut conclure :

$$\left[\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n)^2 n^{-x}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-x}\right) - \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-\ln n) n^{-x}\right)^2\right] \geq 0.$$

Ce résultat étant valable pour tout $x \in I$, comme $\dfrac{1}{\zeta^2(x)} > 0$, on peut désormais écrire, d'après le résultat de la question **II.2.a** :

$\forall x \in I,\ f''(x) \geq 0$ et donc :

$$\boxed{\text{f est convexe sur I}}$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{t^x}{e^t - 1}$ est continue (donc continue par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus : $f(t) \underset{t \to 0}{\sim} t^{x-1}$. Comme : $x - 1 > -1$, alors la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, 1]$ (intégrale de Riemann), et donc, d'après le théorème d'équivalence pour les fonctions à valeurs positives, f est intégrable sur $]0,1]$. De plus : $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 f(t) = 0$; or la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (intégrale de Riemann, $2 > 1$), donc de même, f est intégrable sur $[1, +\infty[$. Ainsi, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^x e^{-t}}{1 - e^{-t}}\, dt$$

et comme : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \left|e^{-t}\right| < 1$, en reconnaissant la somme d'une série géométrique :

$$= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-t})^n\, dt$$

soit en développant :

$$= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} t^x (e^{-t})^{n+1}\, dt.$$

Notons désormais, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $t \mapsto t^x (e^{-t})^{n+1}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. g_n est continue (donc continue par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus : $g_n(t) \underset{t \to 0}{\sim} t^x$. Comme : $x > -1$, alors la fonction $t \mapsto t^x$ est intégrable sur $]0,1]$ (intégrale de Riemann), et donc, d'après le théorème d'équivalence pour les fonctions à valeurs positives, g_n est intégrable sur $]0, 1]$. De plus : $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 g_n(t) = 0$; or la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (intégrale de Riemann, $2 > 1$), donc de même, g_n est intégrable sur $[1, +\infty[$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. ①

- La série de fonctions $\sum g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction f. ②

Enfin, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} \left|g_n(t)\right| dt = \int_0^{+\infty} t^x e^{-(n+1)t}\, dt$$

soit en effectuant le changement de variable affine $u = (n+1)t$, $du = (n+1)dt$ (C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même) :

$$= \frac{1}{(n+1)^{x+1}} \int_0^{+\infty} u^x e^{-u}\, du$$ soit encore, en reconnaissant la fonction Γ :

$$= \frac{1}{(n+1)^{x+1}} \Gamma(x+1).$$

❑ Comme $(x+1) \in I$, en reconnaissant la fonction ζ, la série $\sum \frac{1}{(n+1)^{x+1}}$ converge, et donc, la série $\sum \int_0^{+\infty} |g_n(t)|\, dt$ converge. ③

❑ D'après ①, ② et ③ et le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions sur un intervalle quelconque (parfois appelé "théorème de convergence dominée pour les séries"), on en déduit que :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t)\, dt$$ soit d'après ce qui précède :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{x+1}} \Gamma(x+1)$$ et on peut conclure, en effectuant le changement d'indice $n' = n + 1$:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(x+1)\zeta(x+1) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1}\, dt}$$

4) D'après la question **II.3.**, comme : $\forall x \in I,\ (x-1) \in \mathbb{R}_+^*$, on peut écrire :

$$\forall x \in I,\ g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}\, dt$$

Soit alors F la fonction définie sur $I \times \mathbb{R}_+^*$ par : $(x, t) \mapsto \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}$.

❑ Pour tout $x \in I$, $F(x, .)$ est continue (donc continue par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

❑ Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $F(., t)$ est de classe C^2 sur I, et :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in I,\ \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) = (\ln t) \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}$$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in I,\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, t) = (\ln t)^2 \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}.$$

Les fonctions $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ sont continues (donc continues par morceaux) par rapport à la deuxième variable et continues par rapport à la première variable. Soit alors $(a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, $a < b$. Comme la fonction $x \mapsto t^{x-1}$ est croissante si $t \geq 1$ et décroissante si $t < 1$, et comme pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{(\ln t)^2}{e^t - 1} \geq 0$, on peut écrire :

$$\forall t \in [a, b],\ \forall x \in I,\ \left| \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,\ t) \right| \leq \varphi_{a,b}(t),$$

où $\varphi_{a,b}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi_{a,b} : t \mapsto \begin{cases} (\ln t)^2 \dfrac{t^{a-1}}{e^t - 1} & \text{si } t < 1 \\ (\ln t)^2 \dfrac{t^{b-1}}{e^t - 1} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}.$$

De même que pour F, la fonction $\varphi_{a,b}$ est continue (dont continue par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, la fonction $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ vérifie l'hypothèse de domination locale sur $I \times \mathbb{R}_+^*$.

❑ On peut désormais conclure, d'après une extension du théorème de dérivation sous le signe intégral, que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, et que :

$\forall x \in I, g''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2 t^{x-1}}{e^t - 1} dt$ d'où:

$\forall x \in I, g''(x) \geq 0$ et on peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{g est convexe sur I}}$$

Partie III. Valeurs remarquables de certaines intégrales à l'aide des fonctions Γ et ζ

1) D'après la question **II.3**, on peut écrire, comme $\frac{3}{2} > 1$:

$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\zeta\left(\frac{3}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} dt$ soit en effectuant le changement de variable $t = u^2$, $dt = 2u\,du$ (la fonction $t \mapsto t^2$ étant un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même) :

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{e^{u^2} - 1} dt.$$

Comme : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et que : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, on peut désormais conclure :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{u^2}{e^{u^2} - 1} du = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}$$

b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $u \mapsto \left(\dfrac{\ln(1+u)}{u}\right)^2$. u est continue (donc continue par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a : $\ln(1+u) \underset{u \to 0}{\sim} u$. Ainsi : $f(u) \underset{u \to 0}{\sim} 1$, donc f est intégrable sur $]0, 1]$. De plus : $\lim\limits_{u \to +\infty} u^2 f(u) = 0$; or la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (intégrale de Riemann, $2 > 1$), donc de même, f est intégrable sur $[1, +\infty[$. Ainsi, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit alors $(\varepsilon, X) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, $\varepsilon < X$. Les fonctions $u \mapsto \ln(1+u)^2$ et $u \mapsto -\dfrac{1}{u}$ étant de classe C^1 sur $[\varepsilon, X]$, en effectuant une intégration par parties :

$$\int_\varepsilon^X \left(\frac{\ln(1+u)}{u}\right)^2 du = \left[-\frac{(\ln(1+u))^2}{u}\right]_\varepsilon^X + \int_\varepsilon^X \frac{2\ln(1+u)}{u(1+u)}du \qquad \text{soit :}$$

$$= \frac{(\ln(1+\varepsilon))^2}{\varepsilon} - \frac{(\ln(1+X))^2}{X} + \int_\varepsilon^X \frac{2\ln(1+u)}{u(1+u)}du.$$

Comme : $\dfrac{(\ln(1+\varepsilon))^2}{\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \varepsilon$, et comme : $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{(\ln(1+X))^2}{X} = 0$, on en déduit, en faisant tendre successivement ε vers 0 puis X vers $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\ln(1+u)}{u}\right)^2 du = 2\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+u)}{u(1+u)}du$$

soit avec le changement de variable $v = \ln(1+u)$, $dv = \dfrac{1}{1+u}du$ (la fonction $u \mapsto \ln(1+u)$ étant un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même) :

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{v}{e^v - 1}dv$$

d'où, d'après le résultat de la question **II.3.** :

$$= 2\Gamma(2)\zeta(2)$$

et donc, comme : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$

$$= 2\zeta(2).$$

En reconnaissant $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$ (résultat classique rappelé et admis par l'énoncé), on peut désormais conclure :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \left(\frac{\ln(1+u)}{u}\right)^2 du = \frac{\pi^2}{3}}$$

2) a) On peut écrire :

$$\forall x\in I,\ \zeta(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} - 1 \qquad \text{i.e. :}$$

$$\forall x\in I,\ \zeta(x) - 1 = \frac{1}{2^x} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \qquad \text{et donc :}$$

$$\forall x\in I,\ 2^x(\zeta(x) - 1) = 1 + \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x.$$

Soient alors $x\in I$ et f_x la fonction définie sur I par : $t \mapsto \left(\dfrac{2}{t}\right)^x$. La fonction f_x est décroissante, donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall t\in [n, n+1],\ f_x(n+1) \le f_x(t) \le f_x(n) \qquad \text{d'où :}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f_x(n+1) \le \int_n^{n+1} f_x(t)\,dt \le f_x(n).$$

Comme f_x est continue, positive, décroissante et de limite nulle en l'infini, et comme la série $\sum f_x(n)$ converge, la fonction f_x est intégrable sur $[1, +\infty[$, et en sommant la relation précédente pour n = 2 à N (N ≥ 2) puis en faisant tendre N vers $+\infty$, il vient :

$$0 \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{n+1}\right)^x \leq \int_2^{+\infty} \left(\frac{2}{t}\right)^x dt$$ soit, en effectuant le changement d'indice n' = n + 1 :

$$0 \leq \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x \leq \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt.$$

Or, on peut écrire, pour tout X > 2 :

$$\int_2^X \frac{1}{t^x} dt = \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_2^X$$ i.e. :

$$= \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} - \frac{1}{(x-1)X^{x-1}}$$ et donc, en faisant tendre X vers $+\infty$:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt = \frac{1}{(x-1)2^{x-1}}.$$

Ainsi, on a :

$$\forall x \in I,\ 0 \leq \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x \leq \frac{1}{(x-1)2^{x-1}}.$$

Comme : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} = 0$, alors, d'après le théorème de l'encadrement, on obtient :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x\right) = 0$$ et donc :

$$\lim_{x \to +\infty} 2^x(\zeta(x) - 1) = 1.$$

On peut désormais conclure :

$$\boxed{(\zeta(x) - 1) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2^x}}$$

b) D'après la question **II.3.**, on a :

$$\forall x \in I,\ \Gamma(x)\zeta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$$ et donc :

$$\forall x \in I,\ \Gamma(x)(\zeta(x) - 1) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt - \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt$$ soit, par linéarité de l'intégration :

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}(1 - e^{-t}(e^t - 1))}{e^t - 1}\,dt \qquad \text{soit encore :}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t(e^t - 1)}\,dt.$$

Le résultat de la question **III.2.a.** nous permet de conclure :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t(e^t - 1)}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(x)}{2^x}}$$

3) Soient $x\in I$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{e^t(e^t - 1)}$. f est continue (donc continue par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus : $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-2}$. Comme : $x - 2 > -1$ (car $x\in I$), alors la fonction $t \mapsto t^{x-2}$ est intégrable sur $]0, 1]$ (intégrale de Riemann), et donc, d'après le théorème d'équivalence pour les fonctions à valeurs positives, f est intégrable sur $]0, 1]$. De plus : $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f(t) = 0$; or la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (intégrale de Riemann, $2 > 1$), donc de même, f est intégrable sur $[1, +\infty[$. Ainsi, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors :

$$\forall x\in I,\ \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(e^t + 1)}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{1 + e^{-t}}\,dt$$ et comme : $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $\left|-e^{-t}\right| < 1$, en reconnaissant la somme d'une série géométrique :

$$= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} (-e^{-t})^n\,dt \qquad \text{soit en développant :}$$

$$= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^x (e^{-t})^{n+1}\,dt.$$

Notons désormais, pour tout $n\in\mathbb{N}$, h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $t \mapsto (-1)^n t^x (e^{-t})^{n+1}$.

□ En reprenant les notations adoptées à la question **II.3.**, on a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $h_n = (-1)^n g_n$, et donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, h_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. ①

□ La série de fonctions $\sum h_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction f. ②

Enfin, on peut écrire :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} \left|h_n(t)\right|\,dt = \int_0^{+\infty} g_n(t)\,dt.$$

D'après les calculs effectués à la question **II.3.**, on en déduit que la série $\sum \int_0^{+\infty} \left|h_n(t)\right|\,dt$ converge. ③

□ D'après ①, ② et ③ et le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions sur un intervalle quelconque (parfois appelé "théorème de convergence dominée pour les séries"), on en déduit que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} h_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} h_n(t)\,dt \qquad \text{soit d'après ce qui précède :}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(e^t+1)}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (-1)^n t^{x-1}(e^{-t})^{n+1}dt$$ soit, toujours avec le changmenet de variable $u = (n+1)t$, $du = (n+1)dt$:

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^x} \int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-u}\,du$$ soit encore, en reconnaissant la fonction Γ :

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^x}\Gamma(x)$$ et on peut conclure, en effectuant le changement d'indice $n' = n+1$:

$$\boxed{\forall x \in I,\ \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(e^t+1)}\,dt = -\,\Gamma(x)T(x)}$$

☞ Pour information, cette égalité reste vraie pour $x \in]0, 1[$ (ce qui peut se démontrer à l'aide du critère spécial des séries alternées, car le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique plus dans ce cas).

4) a) D'après les questions **II.3** et **III.3b**, on peut écrire, d'après la linéarité de l'intégration :

$$\forall x \in I,\ \Gamma(x)\zeta(x) - \Gamma(x)T(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(e^t+1)} + \frac{t^{x-1}}{(e^t-1)}\,dt$$ soit :

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2e^t t^{x-1}}{(e^t+1)(e^t-1)}\,dt$$ i.e. :

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2t^{x-1}}{(e^t+1)(1-e^{-t})}\,dt$$ d'où, en reconnaissant $e^t - e^{-t}$ $(t \in \mathbb{R}_+^*)$:

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{\operatorname{sh} t}\,dt.$$

Or, on peut écrire :

$$\forall x \in I,\ \zeta(x) + T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^x}$$ et comme pour tout entier n impair, $1 + (-1)^n = 0$:

$$= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{(2p)^x}$$ soit en reconnaissant de nouveau $\zeta(x)$:

$$= \frac{1}{2^{x-1}}\zeta(x).$$

On en déduit que :

$$\forall x \in I,\ -\,T(x) = \zeta(x)\left(1 - \frac{1}{2^{x-1}}\right)$$ d'où :

$$\forall x \in I,\ \zeta(x) - T(x) = \zeta(x)\left(2 - \frac{1}{2^{x-1}}\right)$$ et donc d'après ce qui précède :

$$\forall x \in I,\ \Gamma(x)\zeta(x) - \Gamma(x)T(x) = \zeta(x)\Gamma(x)\left(2 - \frac{1}{2^{x-1}}\right).$$

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\forall x \in I,\ \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{\operatorname{sh} t}\,dt = \zeta(x)\Gamma(x)\left(2 - \frac{1}{2^{x-1}}\right)}$$

b) ■ En remplaçant x par 2 dans le résultat de la question précédente, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh} t}\,dt = \Gamma(2)\zeta(2)\left(2 - \frac{1}{2^1}\right) \quad \text{soit :}$$

$$= \frac{3}{2}\zeta(2) \quad \text{et donc, d'après le résultat admis par l'énoncé :}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh} t}\,dt = \frac{\pi^2}{4}}$$

■ De même, avec x = 4, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\operatorname{sh} t}\,dt = \Gamma(4)\zeta(4)\left(2 - \frac{1}{2^3}\right) \quad \text{soit :}$$

$$= \frac{15}{8}\Gamma(4)\zeta(4) \quad \text{et donc, comme } \Gamma(4) = 3! = 6 \text{ et } \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} :$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\operatorname{sh} t}\,dt = \frac{\pi^4}{8}}$$