BIENVENUE DANS NOS RESEAUX D'ENERGIE
Marc-Antoine, étudiant en pré-Master
Avec 250 entreprises partenaires, 27 000 anciens diplômés présents dans 121 pays, un maillage unique de professeurs, d'associations, et d'ambassadeurs, le réseau de l'EDHEC est une véritable force sur laquelle vous pourrez compter tout au long de votre cursus et de votre carrière. Venez vous inscrire dans une dimension résolument internationale et découvrir un nouveau monde, celui des réseaux et de l'excellence, qui vous ouvrira d'innombrable portes.
www.edhec-ge.com
EDHEC BUSINESS SCHOOL

CONCOURS EDHEC - ADMISSION SUR TITRES

EN PREMIERE ANNEE

11 AVRIL 2013

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 4

Aucun document ou matériel électronique n'est autorisé.

Le sujet comporte : 3 exercices

Consignes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

A l'issue de chaque composition écrite, tout candidat est tenu sous peine d'élimination, de remettre au surveillant une copie (même blanche, qui sera alors signée). La seule responsabilité du candidat est engagée dans le cas contraire. Tout candidat sortant avant la fin des épreuves doit obligatoirement remettre le sujet en même temps que sa copie.

Exercice 1

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^2$.
On note $\mathcal{B} = (i, j)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Le but de cet exercice est de trouver les couples (u, v) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ vérifiant les 4 assertions suivantes :

(A_1) : $u^2 = -Id$ (il faut comprendre $u \circ u = -Id$).
(A_2) : $v \neq Id$.
(A_3) : $(v - Id)^2 = 0$.
(A_4) : $Ker\,(u + v - Id) \neq \{0\}$.

1) Étude d'un exemple.

Soit les matrices $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Vérifier que les endomorphismes u et v dont les matrices dans $\mathcal{B}$ sont respectivement U et V sont solutions du problème posé.

On revient au cas général et on considère un couple (u, v) solution du problème.

2) a) Montrer que u et v sont des automorphismes de $\mathbb{R}^2$, puis donner les expressions de u^{-1} et v^{-1} en fonction de u, v et Id.
b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, exprimer v^n comme combinaison linéaire de v et Id.

3) Établir que $\mathrm{Im}(v - Id) = \mathrm{Ker}(v - Id)$.

4) Montrer que $\dim \mathrm{Ker}\,(u + v - Id) = 1$.

5) Soit (e_2) une base de $\mathrm{Ker}(u + v - Id)$, on pose : $e_1 = -\,u(e_2)$.
a) Montrer que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
b) Donner les matrices U et V de u et v dans cette base.

6) Donner la conclusion de cet exercice.

Exercice 2

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère une variable aléatoire réelle X dont une densité de probabilité est donnée par :

$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} \text{ si } x \geq \theta \\ 0 \ \text{ si } x < \theta \end{cases}$, θ désignant un réel strictement positif inconnu.

Soit $(X_1, ..., X_n)$ un n-échantillon de la loi de X. On pose :

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et } Z_n = \mathrm{Inf}\,(X_1, X_2, ..., X_n)\,.$$

1) a) Déterminer la fonction de répartition F de X puis reconnaître la loi de $X - \theta$. En déduire l'espérance et la variance de X.
b) Montrer que $T_{1,n} = Y_n - 1$ est un estimateur sans biais de θ.

2) a) Déterminer la fonction de répartition de Z_n puis reconnaître la loi de $Z_n - \theta$.
b) Montrer que $T_{2,n} = Z_n - \dfrac{1}{n}$ est un estimateur sans biais de θ.

3) Calculer les variances de $T_{1,n}$ et $T_{2,n}$. Que peut-on en conclure ?

4) On veut construire un estimateur T_n sans biais et convergent de θ, comme combinaison linéaire de $T_{1,n}$ et $T_{2,n}$. On souhaite, de plus, que la variance de T_n soit la plus petite possible.
On note ρ le coefficient de corrélation linéaire de $T_{1,n}$ et $T_{2,n}$, supposé constant, et on pose :

$$T_n = a_{1,n} T_{1,n} + a_{2,n} T_{2,n}$$

a) Donner la valeur de $a_{1,n} + a_{2,n}$.

b) Écrire la variance de T_n comme une fonction f de $a_{1,n}$, puis déterminer $a_{1,n}$ et $a_{2,n}$ (en fonction de n et de ρ) afin que cette fonction soit minimale.

c) Vérifier que la variance de T_n est inférieure ou égale à celles de $T_{1,n}$ et $T_{2,n}$.

Problème

Rappel

Pour tout entier naturel n et pour tout réel x tel que $|x| < 1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^n}$$

Définition

On considère une variable aléatoire N, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et qui n'est pas la variable nulle.
On pose $p_k = P(N = k)$.
On dit que la loi de N appartient à la famille de Panjer si et seulement si les p_k vérifient la relation de récurrence suivante (dite relation de Panjer), où le couple (a, b), élément de $]-\infty, 1[\times]0, +\infty[$, est tel que, lorsque a est non nul, $1 + \frac{b}{a}$ est un entier : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}$ (1)

Partie 1 : quelques exemples

1) Soit N une variable aléatoire vérifiant (1).

a) En admettant que N possède une variance, déterminer $E(N)$ et $V(N)$ en fonction de a et b.

b) Démontrer que : $E(N) = V(N) \Leftrightarrow a = 0$.

2) On suppose, dans cette question, que N suit la loi de Poisson de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).
Montrer que N vérifie (1) et donner les valeurs de a et b.
Pouvait-on prévoir la valeur de a obtenue dans cette question ?

3) On suppose, dans cette question, que N suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$, avec $0 < p < 1$.
Montrer que N vérifie (1) et déterminer a et b.

4) On suppose, dans cette question, que N suit la loi binomiale négative $\mathcal{BN}(n, p)$, avec $0 < p < 1$ et n entier naturel. On a donc : $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_k = \binom{n+k-1}{k} p^k (1-p)^n$.

a) Dans le cas où $n = 1$, reconnaître la loi de $N + 1$.

b) Dans le cas général, montrer que N vérifie (1) et que l'on a : $a = p$ et $a + b = np$.

Partie 2 : où l'on montre que les trois lois ci-dessus sont les seules de la famille de Panjer.

On considère donc dans cette partie une variable aléatoire N dont la loi vérifie (1).

1) Dans cette question, on suppose $a = 0$.
Montrer que N suit une loi de Poisson dont on donnera le paramètre.

Dans la suite de cette partie, on suppose $a \neq 0$.

2) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = p_0 \dfrac{a^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (\Delta + i)$, pour un certain Δ à préciser en fonction de a et b.

3) On considère ici le cas où $0 < a < 1$.
   a) Montrer, grâce au rappel, que, pour tout entier naturel k, on a : $p_k = \binom{\Delta+k-1}{k} a^k (1-a)^{\Delta}$.
   b) En déduire que N suit une loi binomiale négative.

4) On considère ici le cas où $a < 0$.
   a) Montrer que $\Delta < 0$.
   b) Montrer que, pour tout entier naturel k, on a : $p_k = \binom{-\Delta}{k} (-a)^k \dfrac{1}{(1-a)^{-\Delta}}$.
   c) En déduire que N suit une loi binomiale et en donner ses paramètres.

Partie 3 : algorithme de Panjer

Pour toute variable aléatoire Y, à valeurs dans $\mathbb{N}$, on définit l'espérance de Y conditionnellement à l'événement A par $E(Y \mid A) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\, P_A(Y = k)$ et on admet que l'espérance conditionnelle est linéaire.

Pour une compagnie d'assurance, la charge sinistrale d'un portefeuille de risques pour une année donnée est représentée par la variable aléatoire $X = \sum_{i=1}^{N} U_i$, où N et les U_i sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. De plus, les variables aléatoires U_i sont indépendantes, identiquement distribuées, de loi commune décrite par $q_k = P(U_i = k)$ et indépendantes de N.
On convient que la somme définissant X est nulle si $N = 0$ et on pose toujours $p_k = P(N = k)$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$.

1) Montrer que, pour tout j de $\mathbb{N}$, et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $E\big(U_1 \mid (S_n = j)\big) = \dfrac{j}{n}$.

2) On pose $q_{j,n} = P(S_n = j)$ et on a évidemment $q_{j,0} = 0$ si $j \geq 1$ et $q_{j,0} = 1$ si $j = 0$.

Montrer que : $\forall k \leq j,\ P_{(S_n=j)}(U_1 = k) = \dfrac{q_k\, q_{j-k,n-1}}{q_{j,n}}$.

Dans la suite, on suppose que N vérifie la relation de Panjer.

3) On pose $r_k = P(X = k)$.
   a) Exprimer r_0 en fonction des p_k et de q_0.
   b) À l'aide des questions précédentes, montrer que :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ r_j = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a + bE\left(\frac{U_1}{j} \mid (S_n = j)\right)\right) p_{n-1}\, q_{j,n}$$

   c) Établir que $q_{j,n} = \sum_{k=0}^{j} q_k\, q_{j-k,n-1}$, puis en déduire la formule récursive suivante, appelée algorithme de Panjer : $\forall j \in \mathbb{N}^*,\ r_j = \dfrac{1}{1-aq_0} \sum_{k=1}^{j} \left(a + \dfrac{bk}{j}\right) q_k\, r_{j-k}$.

CONCOURS EDHEC - ADMISSION SUR TITRES

EN PREMIERE ANNEE

AVRIL 2013

<u>EPREUVE DE MATHEMATIQUES</u>

CORRIGE

Exercice 1

1) Vérifions matriciellement que les endomorphismes u et v proposés sont solutions du problème.

$U^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -I_2$ donc $u^2 = -Id$.

$V \neq I_2$ donc $v \neq Id$.

$(V - I_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $(v - Id)^2 = 0$.

$U + V - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc, grâce à la dernière colonne nulle de cette matrice, on peut écrire que : $(u + v - Id)(j) = 0$, ce qui prouve que $\mathrm{Ker}(u + v - Id) \neq \{0\}$.

En conclusion, les endomorphismes u et v dont les matrices respectives dans la base (i, j) sont U et V sont bien solutions du problème.

2) a) $u \circ u = -Id$ donc $u \circ (-u) = (-u) \circ u = Id$, ce qui prouve que u est bijectif. Comme u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, u est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et de plus : $u^{-1} = -u$.

$(v - Id)^2 = \theta$ donc $v^2 - 2v + Id = 0$, d'où l'on tire : $v \circ (2Id - v) = (2Id - v) \circ v = Id$.

Ceci prouve que v est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}^2$, donc un automorphisme de $\mathbb{R}^2$, avec de plus : $v^{-1} = 2Id - v$.

b) On a $v^2 = 2v - Id$. En composant par v, on trouve : $v^3 = 2v^2 - v = 3v - 2Id$. En composant encore, on obtient $v^4 = 4v - 3Id$.

On va donc montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v^n = nv - (n-1)Id$.

Pour $n = 0$, cette relation est vraie. Si l'on suppose qu'elle est vraie pour un n fixé dans $\mathbb{N}$, alors, en composant par v, on a : $v^{n+1} = (nv - (n-1)Id) \circ v = nv^2 - (n-1)v$, d'où :

$v^{n+1} = n(2v - Id) - (n-1)v = (n+1)v - nId$.

On a bien montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v^n = nv - (n-1)Id$.

3) a) Soit x un élément quelconque de $\mathrm{Im}(v - Id)$, alors il existe t, élément de $\mathbb{R}^2$, tel que :

$$x = (v - Id)(t)$$

En composant par $v - Id$, on obtient : $(v - Id)(x) = (v - Id)^2(t)$, d'où $(v - Id)(x) = 0$, car $(v - Id)^2 = 0$. Ceci prouve que x appartient à $\mathrm{Ker}(v - Id)$.

Conclusion : $\mathrm{Im}(v - Id) \subset \mathrm{Ker}(v - Id)$.

b) On sait que $v \neq Id$, donc $v - Id \neq 0$, on est alors sûr que $\mathrm{Im}(v - Id) \neq \{0\}$, d'où l'on peut conclure que $\dim \mathrm{Im}(v - Id) \geq 1$. Mais, d'après le résultat de la question 3a), on a :

$\dim \mathrm{Ker}(v - Id) \geq \dim \mathrm{Im}(v - Id)$, on a donc aussi : $\dim \mathrm{Ker}(v - Id) \geq 1$.

Il est temps d'écrire la formule du rang : $\dim \mathrm{Ker}(v - Id) + \dim \mathrm{Im}(v - Id) = 2$.

La seule possibilité est donc : $\dim \mathrm{Ker}(v - Id) = \dim \mathrm{Im}(v - Id) = 1$.

D'après le résultat de la question 3a), on a $\mathrm{Im}(v - Id) \subset \mathrm{Ker}(v - Id)$ et on vient de voir que $\dim \mathrm{Ker}(v - Id) = \dim \mathrm{Im}(v - Id)$, on peut alors conclure, d'après le théorème du sous-espace, que : $\mathrm{Im}(v - Id) = \mathrm{Ker}(v - Id)$.

4) Comme $\mathrm{Ker}(u+v-Id) \neq \{0\}$, les seules valeurs possibles de $\dim \mathrm{Ker}(u+v-Id)$ sont 1 ou 2. Si l'on suppose que $\dim \mathrm{Ker}(u+v-Id) = 2$, alors $\mathrm{Ker}(u+v-Id) = \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire $u+v-Id = 0$. Dans ce cas, on aurait $v-Id = -u$, d'où l'on tirerait alors $(v-Id)^2 = u^2 = -Id$, mais on sait que $(v-Id)^2 = 0$. Il y a une contradiction évidente (car $0 \neq -Id$), il est donc impossible que $\dim \mathrm{Ker}(u+v-Id) = 2$, ce qui prouve que : $\dim \mathrm{Ker}(u+v-Id) = 1$.

5) a) Soit a et b deux réels tels que $(*)$ $ae_1 + be_2 = 0$. En composant par u et en tenant compte du fait que u est linéaire, on obtient : $au(e_1) + bu(e_2) = 0$.
Mais $u(e_2) = -e_1$ d'où $u(e_1) = -u^2(e_2) = e_2$, on a donc : $ae_2 - be_1 = 0$.

Si l'on avait $a \neq 0$, alors on aurait $e_2 = \dfrac{b}{a} e_1$, d'où, en remplaçant dans $(*)$:

$(a + \dfrac{b^2}{a})e_1 = 0$. On aurait donc $\dfrac{a^2+b^2}{a} = 0$ (car e_1 est non nul), d'où $a^2 + b^2 = 0$, ce qui est impossible car $a \neq 0$. Par conséquent, a est nul et on en déduit aisément, toujours grâce à $(*)$ que $b = 0$.
Conclusion : (e_1, e_2) est une famille libre de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ donc (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

b) Par définition de e_1, $e_1 = -u(e_2)$ donc $u(e_1) = e_2$, ce qui donne la première colonne de U. On a aussi $u(e_2) = -e_1$, ce qui fournit la deuxième colonne de U.

La matrice de u dans la base (e_1, e_2) est donc la matrice $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

D'autre part, $(u+v-Id)(e_2) = 0$ donc $v(e_2) = e_2 - u(e_2) = e_2 + e_1$, ce qui donne la deuxième colonne de V. Cette égalité s'écrit aussi : $e_1 = (v-Id)(e_2)$, ce qui prouve que e_1 appartient à $\mathrm{Im}(v-Id) = \mathrm{Ker}(v-Id)$, cette dernière égalité provenant de la question 3b). On en déduit, par définition du noyau, que $(v-Id)(e_1) = 0$, c'est-à-dire que $v(e_1) = e_1$.
En résumé : $v(e_1) = e_1$ et $v(e_2) = e_1 + e_2$, donc :

La matrice de v dans la base (e_1, e_2) est : $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6) D'après la première question, il existe effectivement des couples (u,v) qui sont solutions du problème posé. La suite de l'exercice prouve que ce sont les couples (u,v) d'endomorphismes tels qu'il existe une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle les matrices de u et v sont respectivement U et V.

Exercice 2

1) a) Par définition, on a : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

- $\forall x < \theta$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$.
- $\forall x \geq \theta$, $F(x) = \int_{-\infty}^{\theta} 0\,dt + \int_{\theta}^{x} e^{-(t-\theta)}dt = 1 - e^{-(x-\theta)}$.
- Posons $Y = X - \theta$.

On a $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(X \leq x+\theta) = F(x+\theta)$. On en déduit :

$\forall x < 0$, $F_Y(x) = 0$ (puisque $x + \theta < \theta$).

$\forall x \geq 0$, $F_Y(x) = 1 - e^{-(x+\theta-\theta)} = 1 - e^{-x}$.

Conclusion : Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

On a donc $E(Y) = V(Y) = 1$ d'où l'on tire : $E(X) = \theta + 1$ et $V(X) = 1$

b) Par linéarité de l'espérance, on trouve $E(Y_n) = \theta + 1$, puis $E(T_{1,n}) = \theta$, ce qui prouve que $T_{1,n}$ est un estimateur sans biais de θ.

2) a) Pour tout réel x, on a : $1 - F_{Z_n}(x) = P(Z_n > x) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i > x)\right)$.

Par indépendance mutuelle des X_i, on obtient : $1 - F_{Z_n}(x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x)$.

Comme les X_i ont même loi que X, on a finalement : $1 - F_{Z_n}(x) = \left(P(X > x)\right)^n$

Conclusion : $F_{Z_n}(x) = 1 - \left(1 - F(x)\right)^n = \begin{cases} 1 - e^{-n(x-\theta)} \text{ si } x \geq \theta \\ 0 \text{ si } x < \theta \end{cases}$.

De même que pour la loi de $X - \theta$, on trouve que $Z_n - \theta$ suit la loi exponentielle de paramètre n.

b) On a donc, d'après la question précédente : $E(Z_n) = \theta + \frac{1}{n}$, puis $E(T_{2,n}) = E(Z_n) - \frac{1}{n} = \theta$.

Conclusion : $T_{2,n}$ est un estimateur sans biais de θ.

3) On a $V(T_{1,n}) = V(Y_n - 1) = V(Y_n)$. Comme $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et comme les X_i sont mutuellement indépendantes, on a : $V(T_{1,n}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{1}{n}$.

On a aussi : $V(T_{2,n}) = V\left(Z_n - \frac{1}{n}\right) = V(Z_n) = V(Z_n - \theta) = \frac{1}{n^2}$.

Conclusion : $T_{2,n}$ est plus efficace (ou converge plus rapidement) que $T_{1,n}$.

4) a) Comme on souhaite que T_n soit un estimateur sans biais de θ, on a, par linéarité de l'espérance : $\theta = E(T_n) = a_{1,n}E(T_{1,n}) + a_{2,n}E(T_{2,n}) = \theta(a_{1,n} + a_{2,n})$.

Comme θ est différent de 0, on en conclut : $a_{1,n} + a_{2,n} = 1$

b) Par définition de T_n, on a :

$V(T_n) = V(a_{1,n}T_{1,n} + a_{2,n}T_{2,n}) = a_{1,n}^2 \, V(T_{1,n}) + a_{2,n}^2 \, V(T_{2,n}) + 2a_{1,n}a_{2,n}\operatorname{cov}(T_{1,n}, T_{2,n})$.

En remplaçant et en tenant compte du fait que $\rho = \frac{\operatorname{cov}(T_{1,n}, T_{2,n})}{\sqrt{V(T_{1,n})V(T_{2,n})}}$, on obtient :

$$V(T_n) = \frac{a_{1,n}^2}{n} + \frac{a_{2,n}^2}{n^2} + 2a_{1,n}(1 - a_{1,n})\rho\sqrt{\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{n^2}\left(na_{1,n}^2 + (1 - a_{1,n})^2 + 2\rho\, a_{1,n}(1 - a_{1,n})\sqrt{n}\right).$$

$V\left(T_n\right)=\dfrac{1}{n^2}\left(\left(n+1-2\rho\sqrt{n}\right)a_{1,n}^2+2\left(\rho\sqrt{n}-1\right)a_{1,n}+1\right)$.

Avec la notation donnée par l'énoncé, on trouve :

$f'\left(a_{1,n}\right)=\dfrac{2}{n^2}\left(\left(n+1-2\rho\sqrt{n}\right)a_{1,n}+\left(\rho\sqrt{n}-1\right)\right)$.

Comme $\rho\in[-1,1]$, on a :

$n+1-2\rho\sqrt{n}\geq n+1-2\sqrt{n}$, c'est-à-dire : $n+1-2\rho\sqrt{n}\geq\left(\sqrt{n}-1\right)^2>0$ (car $n\geq 2$).

On en déduit : $f'\left(a_{1,n}\right)\geq 0\Leftrightarrow a_{1,n}\geq-\dfrac{\rho\sqrt{n}-1}{n+1-2\rho\sqrt{n}}$.

Ceci prouve que f atteint un minimum en $-\dfrac{\rho\sqrt{n}-1}{n+1-2\rho\sqrt{n}}$.

La variance de T_n est donc minimale si $a_{1,n}=-\dfrac{\rho\sqrt{n}-1}{n+1-2\rho\sqrt{n}}$.

On a alors : $V\left(T_n\right)=\dfrac{1}{n^2}\left(\left(n+1-2\rho\sqrt{n}\right)\dfrac{\left(\rho\sqrt{n}-1\right)^2}{\left(n+1-2\rho\sqrt{n}\right)^2}-2\left(\rho\sqrt{n}-1\right)\dfrac{\rho\sqrt{n}-1}{n+1-2\rho\sqrt{n}}+1\right)$.

$V\left(T_n\right)=\dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{\left(\rho\sqrt{n}-1\right)^2}{\left(n+1-2\rho\sqrt{n}\right)}-2\dfrac{\left(\rho\sqrt{n}-1\right)^2}{n+1-2\rho\sqrt{n}}+1\right)$.

$V\left(T_n\right)=\dfrac{1}{n^2}\left(1-\dfrac{\left(\rho\sqrt{n}-1\right)^2}{\left(n+1-2\rho\sqrt{n}\right)}\right)$.

c) Comme $1-\dfrac{\left(\rho\sqrt{n}-1\right)^2}{\left(n+1-2\rho\sqrt{n}\right)}<1$, on vérifie que $V\left(T_n\right)<\dfrac{1}{n^2}$.

En se souvenant que $V\left(T_{2,n}\right)=\dfrac{1}{n^2}$ et $V\left(T_{1,n}\right)=\dfrac{1}{n}$, on a : $V\left(T_n\right)<\left(T_{2,n}\right)<V\left(T_{1,n}\right)$

Problème

Partie 1 : quelques exemples

1) a) • En multipliant la relation (1) par k et en sommant (on peut car X a une variance donc une espérance), on trouve : $\sum_{k=1}^{+\infty}k\,p_k=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(ka+b\right)p_{k-1}$.

Le changement d'indice $i=k-1$ dans la somme de droite donne : $\sum_{k=1}^{+\infty}k\,p_k=\sum_{i=0}^{+\infty}\left(ia+a+b\right)p_i$.

En scindant la somme de droite, on obtient : $E\left(N\right)=aE\left(N\right)+a+b$

Comme a est différent de 1, on a enfin : $E\left(N\right)=\dfrac{a+b}{1-a}$.

• En multipliant la relation (1) par k^2 et en sommant (on peut car X a une variance), on trouve : $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2\, p_k = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(k^2 a + kb\right) p_{k-1}$.

Le changement d'indice $i = k-1$ dans la somme de droite donne :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 p_k = \sum_{i=0}^{+\infty}\left((i+1)^2 a + (i+1)b\right) p_i = a\sum_{i=0}^{+\infty} i^2 p_i + (2a+b)\sum_{i=0}^{+\infty} i p_i + (a+b)\sum_{i=0}^{+\infty} p_i .$$

Ainsi, on obtient :

$$E\left(N^2\right) = aE\left(N^2\right) + (2a+b)E(N) + a + b = aE\left(N^2\right) + (2a+b)\times\frac{a+b}{1-a} + a + b .$$

$$E\left(N^2\right) = aE\left(N^2\right) + (2a+b)\times\frac{a+b}{1-a} + a + b = aE\left(N^2\right) + \frac{2a^2+3ab+b^2+a+b-a^2-ab}{1-a} .$$

$$E\left(N^2\right) = \frac{a^2+2ab+b^2+a+b}{(1-a)^2} = \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2} .$$

On a enfin : $V(N) = \dfrac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2} - \dfrac{(a+b)^2}{(1-a)^2} = \dfrac{a+b}{(1-a)^2}$.

b) $E(N) = V(N) \Leftrightarrow \dfrac{a+b}{(1-a)^2} = \dfrac{a+b}{1-a} \Leftrightarrow a+b = (a+b)(1-a) \Leftrightarrow (a+b)a = 0$.

Si l'on avait $a+b=0$, la relation (1) avec $k=1$ donnerait, pour tout $k \geq 1$: $p_k = 0$. On aurait donc $p_0 = 1$ (puisque $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$) et N serait la variable certaine égale à 0, ce qui est exclu par l'énoncé. On peut donc simplifier par $a+b$ et on obtient : $E(N) = V(N) \Leftrightarrow a = 0$.

2) Comme N suit la loi de Poisson de paramètre λ, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda}{k}\times\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda}{k}\, p_{k-1} .$$

Pour $k \geq 1$, on a donc : $p_k = \dfrac{\lambda}{k}\times\dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda} = \dfrac{\lambda}{k}\, p_{k-1}$

Ceci prouve que N vérifie la relation (1) avec : $a = 0$ et $b = \lambda$.

Il est normal de trouver $a = 0$ puisque, si N suit une loi de Poisson, alors son espérance est égale à sa variance et le résultat de la question 1b) est confirmé.

3) Comme N suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, on a, pour tout entier naturel k :

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}\frac{p}{1-p}\, p^{k-1}(1-p)^{n-(k-1)} = \left(\frac{-p}{1-p} + \frac{(n+1)\dfrac{p}{1-p}}{k}\right) p_{k-1} .$$

Ceci prouve que N vérifie la relation (1) avec : $a = \dfrac{-p}{1-p}$ et $b = (n+1)\dfrac{p}{1-p}$.

4) a) Pour $n = 1$, la loi de N est donnée par : $\forall k \in \mathbb{N},\ P(N = k) = p^k(1-p)$.

On a alors, pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $P(N+1=k)=P(N=k-1)=p^{k-1}(1-p)$

Ceci prouve que $N+1$ suit la loi géométrique de paramètre $1-p$

b) On a : $\forall k\in\mathbb{N}$, $p_k=\binom{n+k-1}{k}p^k(1-p)^n=\dfrac{n+k-1}{k}p\times\binom{n+k-2}{k-1}p^{k-1}(1-p)^n=p\dfrac{n+k-1}{k}p_{k-1}$.

$p_k=\left(p+\dfrac{(n-1)p}{k}\right)p_{k-1}$.

Ceci prouve que N vérifie la relation (1) avec : $a=p$ et $b=(n-1)p$.

On vérifie bien que $a+b=n\,p$.

Partie 2 : où l'on montre que les trois lois ci-dessus sont les seules de la famille de Panjer.

1) Avec $a=0$, la relation (1) s'écrit : $p_k=\dfrac{b}{k}p_{k-1}$.

En multipliant par $k!$, on obtient : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $k!\,p_k=b(k-1)!\,p_{k-1}$. Ceci montre que la suite $(k!\,p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison b. On a donc : $\forall k\in\mathbb{N}$, $k!\,p_k=b^k p_0$.

Pour tout entier naturel k, on a donc : $p_k=\dfrac{b^k}{k!}p_0$. Comme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}p_k=1$, on en déduit $p_0\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{b^k}{k!}=1$ et ainsi : $p_0=e^{-b}$.

Pour conclure, on a : $\forall k\in\mathbb{N}$, $p_k=\dfrac{b^k}{k!}e^{-b}$. N suit donc la loi de Poisson de paramètre b.

2) Comme, pour tout entier naturel j non nul, on a $p_j=\left(a+\dfrac{b}{j}\right)p_{j-1}$, en multipliant ces égalités pour j allant de 1 à k, on obtient après simplification : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $p_k=p_0\prod\limits_{j=1}^{k}\left(a+\dfrac{b}{j}\right)$.

Comme $a\neq 0$, on peut alors écrire, pour tout entier naturel k non nul :

$$p_k=a^k p_0\prod_{j=1}^{k}\left(a+\frac{b}{j}\right)=p_0\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{a\,j+b}{j}\right)=\frac{p_0}{k!}\prod_{j=1}^{k}(a\,j+b)=a^k\frac{p_0}{k!}\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{a\,j+b}{a}\right)=a^k\frac{p_0}{k!}\prod_{j=1}^{k}\left(j+\frac{b}{a}\right).$$

En changeant d'indice, on obtient : $p_k=a^k\dfrac{p_0}{k!}\prod\limits_{i=0}^{k-1}\left(i+1+\dfrac{b}{a}\right)$. En posant $\Delta=1+\dfrac{b}{a}$, on trouve bien : $p_k=a^k\dfrac{p_0}{k!}\prod\limits_{i=0}^{k-1}(i+\Delta)$.

3) Comme Δ est entier (par hypothèse donnée dans l'énoncé) et comme a est positif, on est certain que Δ est entier naturel. Dès lors, on a : $p_k=a^k\dfrac{p_0}{k!}\dfrac{(\Delta+k-1)!}{(\Delta-1)!}=a^k p_0\binom{\Delta+k-1}{k}$

Comme $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$, on a : $p_0 \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \binom{\Delta+k-1}{k} = 1$. Comme a appartient à $]0,1[$, le rappel permet d'écrire : $p_0 \dfrac{1}{(1-a)^{\Delta}} = 1$. On a donc : $p_0 = (1-a)^{\Delta}$ .En remplaçant dans l'expression de p_k, on obtient : $p_k = \binom{\Delta+k-1}{k} a^k (1-a)^{\Delta}$.

b) En effet, comme $0 < a < 1$, N suit la loi binomiale négative $\mathcal{BN}(\Delta , a)$,

4) a) On sait que $\Delta = 1 + \dfrac{b}{a} = \dfrac{a+b}{a}$ et que N vérifie la relation de Panjer. En écrivant celle-ci pour $k = 1$, on trouve : $p_1 = (a+b)\, p_0$. D'après la question 2), si p_0 était nul, alors tous les p_k le seraient aussi et N ne serait pas une variable aléatoire, par conséquent $p_0 > 0$ et ainsi, on obtient $a + b = \dfrac{p_1}{p_0}$. Si p_1 était nul, alors tous les p_k ($k \geq 2$) le seraient aussi et N serait la variable aléatoire nulle (puisque l'on aurait $p_0 = 1$), ce qui est contraire à l'énoncé.
En conclusion, p_1 est strictement positif et on a $a + b > 0$.
Pour finir, comme a est strictement négatif, on conclut que : $\Delta < 0$.

b) D'après la question 2), on a :

$$p_k = a^k \frac{p_0}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (i+\Delta) = a^k \frac{p_0}{k!} (-1)^k \prod_{i=0}^{k-1} (-i-\Delta) = (-a)^k \frac{p_0}{k!} \times \frac{(-\Delta)!}{(-\Delta-k)!} = (-a)^k\, p_0 \binom{-\Delta}{k}.$$

Comme $\binom{-\Delta}{k}$ est nul si $k > -\Delta$, on est sûr que $N(\Omega) = [\![0, -\Delta]\!]$ et comme de plus, N est une variable aléatoire, on a $\sum_{k=0}^{-\Delta} p_k = 1$, d'où : $p_0 \sum_{k=0}^{-\Delta} (-a)^k \binom{-\Delta}{k} = 1$. Avec la formule du binôme, on obtient : $p_0 (1-a)^{-\Delta} = 1$. On a donc : $p_0 = \dfrac{1}{(1-a)^{-\Delta}}$. En remplaçant dans l'expression de p_k, on obtient : $p_k = \binom{-\Delta}{k} (-a)^k \dfrac{1}{(1-a)^{-\Delta}}$. On peut alors écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ p_k = \binom{-\Delta}{k} (-a)^k \frac{1}{(1-a)^{-\Delta-k}} \times \frac{1}{(1-a)^k} = \binom{-\Delta}{k} \left(\frac{-a}{1-a}\right)^k \left(\frac{1}{1-a}\right)^{-\Delta-k}.$$

c) Comme $-\Delta > 0$, $\dfrac{-a}{1-a} > 0$ et $\dfrac{-a}{1-a} + \dfrac{1}{1-a} = 1$, on en déduit que N suit la loi binomiale de paramètres $-\Delta$ et $\dfrac{-a}{1-a}$.

Partie 3 : algorithme de Panjer

1) Remarquons tout d'abord que $E\big(S_n \mid (S_n = j)\big) = j$. Comme $S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$, ceci peut s'écrire, par linéarité de l'espérance conditionnelle :

$E\big(U_1 \mid (S_n = j)\big) + E\big(U_2 \mid (S_n = j)\big) + \ldots + E\big(U_n \mid (S_n = j)\big) = j.$

Ensuite, comme les variables U_i suivent la même loi et sont indépendantes, on a :

$E\left(U_1 \mid (S_n = j)\right) = E\left(U_2 \mid (S_n = j)\right) = \ldots = E\left(U_n \mid (S_n = j)\right)$

On obtient alors : $n\ E\left(U_1 \mid (S_n = j)\right) = j$, d'où : $E\left(U_1 \mid (S_n = j)\right) = \dfrac{j}{n}$.

2) On a : $P_{(S_n = j)}(U_1 = k) = \dfrac{P([U_1 = k] \cap [S_n = j])}{P(S_n = j)} = \dfrac{P\left([U_1 = k] \cap \left[\sum_{i=2}^{n} U_i = j - k\right]\right)}{P(S_n = j)}$

Par indépendance de U_1 et de $U_2 + U_3 + \ldots + U_n$, on obtient :

$$P_{(S_n = j)}(U_1 = k) = \frac{P(U_1 = k)\, P\left(\sum_{i=2}^{n} U_i = j - k\right)}{P(S_n = j)}.$$

Comme les variables U_i suivent la même loi et sont indépendantes, on peut écrire :

$$P\left(\sum_{i=2}^{n} U_i = j - k\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n-1} U_i = j - k\right) = P(S_{n-1} = j - k).$$

En remplaçant, on trouve : $P_{(S_n = j)}(U_1 = k) = \dfrac{P(U_1 = k)\, P((S_{n-1} = j - k))}{P(S_n = j)}$

Avec les notations de l'énoncé, ceci s'écrit : $P_{(S_n = j)}(U_1 = k) = \dfrac{q_k\, q_{j-k,n-1}}{q_{j,n}}$

3) a) $r_0 = P(X = 0) = P\left(\sum_{i=1}^{N} U_i = 0\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n) P_{(N=n)}\left(\sum_{i=1}^{N} U_i = 0\right))$

$$r_0 = P(N = 0) \times 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n) P_{(N=n)}\left(\sum_{i=1}^{N} U_i = 0\right) = P(N = 0) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n) P_{(N=n)}(S_n = 0).$$

Comme N est indépendante de $U_1, U_2, \ldots, U_n$, elle est indépendante de S_n, et il reste :

$$r_0 = P(N = 0) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n) P(S_n = 0) = p_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n\, q_{0,n}.$$

Il reste à remarquer que, puisque les variables U_i prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}$, on a :

$q_{0,n} = P\left(\sum_{i=1}^{n} U_i = 0\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [U_i = 0]\right)$. Par indépendance des U_i, on obtient :

$$q_{0,n} = \prod_{i=1}^{n} P(U_i = 0) = (q_0)^n.$$

Pour conclure : $r_0 = p_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n\, (q_0)^n$.

b) Pour tout entier naturel j non nul, on a :

$r_j = P(X = j) = P\left(\sum_{i=1}^{N} U_i = j\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n) P_{(N=n)}\left(\sum_{i=1}^{N} U_i = j\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n) P_{(N=n)}(S_n = j)$ car si $(N = 0)$ est réalisé, alors il est impossible que $\left(\sum_{i=1}^{n} U_i = j\right)$ se réalise (d'après l'énoncé).

Toujours par indépendance de N avec S_n ceci s'écrit : $r_j = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n)P(S_n=j)$.

On obtient : $\forall j \in \mathbb{N}^*,\ r_j = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k\, q_{j,k}$.

Comme N vérifie la relation de Panjer, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}$, et en remplaçant, on trouve : $\forall j \in \mathbb{N}^*,\ r_j = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}\, q_{j,n}$.

Or, d'après la question 1) de cette partie, on a $E\left(U_1 \mid (S_n = j)\right) = \frac{j}{n}$, et par linéarité de l'espérance, on en déduit : $E\left(\frac{U_1}{j} \mid (S_n = j)\right) = \frac{1}{n}$. En remplaçant dans l'expression de r_j, on trouve bien : $\forall j \in \mathbb{N}^*,\ r_j = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a + b\, E\left(\frac{U_1}{j} \mid (S_n = j)\right)\right) p_{n-1}\, q_{j,n}$.

c) D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$q_{j,n} = P(S_n = j) = \sum_{k=0}^{j} P\left([U_1 = k] \cap [S_n = j]\right).$$

On a vu, au cours du calcul fait à la question 2), que :

$P\left([U_1 = k] \cap [S_n = j]\right) = q_k\, q_{j-k,n-1}$, ce qui permet d'en déduire : $q_{j,n} = \sum_{k=0}^{j} q_k\, q_{j-k,n-1}$.

Par définition de l'espérance conditionnelle, on a :

$$E\left(\frac{U_1}{j} \mid (S_n = j)\right) = \sum_{k=0}^{j} \frac{k}{j} P_{(S_n=j)}(U_1 = k) = \sum_{k=0}^{j} \frac{k}{j} \times \frac{q_k\, q_{j-k,n-1}}{q_{j,n}}$$

En remplaçant dans l'expression de r_j, on obtient successivement :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ r_j = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a + b \sum_{k=0}^{j} \frac{k}{j} \times \frac{q_k\, q_{j-k,n-1}}{q_{j,n}}\right) p_{n-1}\, q_{j,n}.$$

$$r_j = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a\, p_{n-1}\, q_{j,n} + b \sum_{k=0}^{j} \frac{k}{j} q_k\, q_{j-k,n-1} p_{n-1}\right).$$

On remplace $q_{j,n}$ et on obtient : $r_j = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a\, p_{n-1} \sum_{k=0}^{j} q_k\, q_{j-k,n-1} + b \sum_{k=0}^{j} \frac{k}{j} q_k\, q_{j-k,n-1} p_{n-1}\right)$.

$$r_j = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{j} \left(a + \frac{bk}{j}\right) p_{n-1} q_k\, q_{j-k,n-1}$$

Comme $p_{n-1}\, q_{j-k,n-1} \leq p_{n-1}$ et comme la série de terme général p_{n-1} converge, on peut permuter les sommes :

$$r_j = \sum_{k=0}^{j} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a + \frac{bk}{j}\right) p_{n-1} q_k\, q_{j-k,n-1} = \sum_{k=0}^{j} \left(a + \frac{bk}{j}\right) q_k \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1}\, q_{j-k,n-1}$$

En changeant d'indice, on obtient : $r_j = \sum_{k=0}^{j} \left(a + \frac{bk}{j}\right) q_k \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, q_{j-k,n}$

On a vu à la question 3b) que : $\forall j \in \mathbb{N}^*,\ r_j = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n\, q_{j,n}$.

On en déduit que : $\forall k \in [\![0, j-1]\!],\ r_{j-k} = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n\, q_{j-k,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, q_{j-k,n} - p_0 q_{j-k,0}$.

Comme $q_{j-k,0} = 0$ (car $j-k \geq 1$), il reste : $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, q_{j-k,n} = r_{j-k}$.

On isole donc le terme correspondant à $k = j$ dans la somme définissant r_j, on obtient :

$r_j = \sum_{k=0}^{j-1}\left(a + \frac{bk}{j}\right) q_k \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, q_{j-k,n} + (a+b)\, q_j \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, q_{0,n}$ et on remplace, ce qui donne :

$r_j = \sum_{k=0}^{j-1}\left(a + \frac{bk}{j}\right) q_k r_{j-k} + (a+b)\, q_j \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, q_{0,n}$

Il faut maintenant se souvenir que : $r_0 = p_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n\, q_{0,n}$.

Par conséquent : $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, q_{0,n} = p_0 q_{0,0} + r_0 - p_0$, et comme $q_{0,0} = 1$, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, q_{0,n} = r_0$.

On remplace dans l'expression de r_j et on trouve :

$r_j = \sum_{k=0}^{j-1}\left(a + \frac{bk}{j}\right) q_k r_{j-k} + (a+b)\, q_j r_0$. Le dernier terme correspond au terme d'indice j de la somme donc on peut le réintégrer et on a : $r_j = \sum_{k=0}^{j}\left(a + \frac{bk}{j}\right) q_k r_{j-k}$.

En isolant le terme d'indice 0, on obtient : $r_j = a\, q_0 r_j + \sum_{k=1}^{j}\left(a + \frac{bk}{j}\right) q_k r_{j-k}$.

On a donc : $r_j\left(1 - a\, q_0\right) = \sum_{k=1}^{j}\left(a + \frac{bk}{j}\right) q_k r_{j-k}$ et on en déduit :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ r_j = \frac{1}{1 - a q_0} \sum_{k=1}^{j}\left(a + \frac{bk}{j}\right) q_k r_{j-k}$$

EDHEC BUSINESS SCHOOL

ADMISSION SUR TITRES EN PREMIERE ANNEE

RAPPORT DE CORRECTION 2013 :

Epreuve de MATHEMATIQUES

Présentation de l'épreuve.

L'épreuve, longue comme d'habitude, et peut-être plus difficile que l'année dernière, comportait deux exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur la presque totalité du programme de l'épreuve, une part conséquente étant réservée aux probabilités et aux statistiques. Les correcteurs ont trouvé le sujet adapté et très sélectif tout en respectant scrupuleusement le programme.

• L'exercice 1 proposait l'étude d'un couple (u, v) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ vérifiant les quatre conditions suivantes :

$$(A_1) : u^2 = -Id.$$
$$(A_2) : v \neq Id .$$
$$(A_3) : (v - Id)^2 = 0.$$
$$(A_4) : Ker\,(u + v - Id) \neq \{0\}.$$

L'objectif était de prouver que les couples (u, v) solutions du problème sont ceux pour lesquels il existe une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle leurs matrices sont respectivement $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

• L'exercice 2 avait pour but l'estimation ponctuelle du paramètre $\theta > 0$ d'une loi exponentielle "décalée", c'est-à-dire de densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & \text{si} \quad x \geq \theta \\ 0 & \text{si} \quad x < \theta \end{cases}$$

Dans un premier temps, on étudiait deux estimateurs dont on vérifiait qu'ils étaient sans biais et convergents, puis l'énoncé proposait la construction d'un troisième estimateur, combinaison linéaire des deux premiers, qui soit encore plus efficace que chacun d'eux.

• L'exercice 3 portant sur le programme d'analyse et de probabilités, avait pour objectif d'étudier, dans un cas particulier, l'algorithme de Panjer, utilisé en mathématiques actuarielles afin de construire un modèle permettant une gestion rigoureuse du bonus-malus.

Si N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on dit que la loi de N appartient à la famille de Panjer si et seulement si les probabilités $p_k = P\left(N = k\right)$ vérifient la relation de récurrence suivante, où $(a, b) \in\,]-\infty, 1[\times]0, +\infty[$:

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}$$

La première partie permettait d'établir que les lois binomiales, binomiales négatives et de Poisson appartiennent à cette famille.

La deuxième partie établissait que les trois lois précédentes sont les seules de la famille de Panjer.

La troisième partie mettait en place l'algorithme de Panjer à proprement parler.

Moyenne.
Pour les 627 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est de 9,66 sur 20 pour un écart-type d'environ 5,1.
7,5 % des candidats obtiennent une note inférieure ou égale à 4.
4% des candidats obtiennent une note supérieure à 18 (soit 26 candidats, dont 15 obtiennent la note maximale.

Analyse des copies.
Les correcteurs notent une fois encore que le niveau est très hétérogène, ceci étant, comme d'habitude, dû aux origines scolaires et universitaires diverses des candidats. La moyenne, moins bonne que l'année dernière, pourrait être due au côté assez conceptuel du sujet (du moins en ce qui concerne le problème).
Cette année, on observe d'un côté, de rares très bons candidats ayant des connaissances correctes et une certaine faculté à construire un raisonnement, et de l'autre, un certain nombre de candidats très mal préparés et semblant avoir fait des impasses, certainement par manque de temps pour préparer cette épreuve.
Rappelons que les trois "compartiments" du programme de mathématiques (analyse, algèbre et probabilités) sont essentiels pour une bonne continuation des études à l'EDHEC.

En ce qui concerne la crédibilité des copies, signalons les quelques points suivants :
Exercice 1
- À partir de la deuxième question, on revenait au cas général ce que presque la moitié des candidats ont oublié (la note obtenue à cet exercice étant ainsi voisine de 0)
- Le fait que $(v-Id)^2=0$ n'autorise pas à écrire $(v(x)-x)^2=0$, ce qui n'a aucun sens.
- Beaucoup de candidats ignorent le sens du mot combinaison linéaire.
- Affirmer sans preuve ne rapporte aucun point et les "évidences" n'en sont que si elles sont accompagnées d'une argumentation sans faille ! Par exemple, prétendre qu'une inclusion est évidente alors que les correcteurs savent qu'elle est impossible à établir de façon directe, est très mal reçu par ces derniers.
- Pour finir, certains candidats connaissent des notions qu'il n'était pas indispensable de connaître pour faire cet exercice et qui dépassent le cadre du programme (lequel ne comporte ni les déterminants, ni les notions de polynôme caractéristique et de polynôme minimal) : ils doivent savoir que les résultats utilisant ces notions n'ont pas été validés.

Exercice 2
- Trop de candidats ignorent comment trouver la fonction de répartition d'une variable aléatoire dont on connaît une densité, un certain nombre ignorant même la définition.
- Les correcteurs savent qu'à partir d'un résultat faux on peut déduire un résultat correct, mais ce n'est pas pour autant que la démonstration utilisée sera validée…
- Les correcteurs savent également que certains résultats donnés (par exemple le fait qu'un estimateur soit sans biais) permettent de deviner un résultat antérieur, mais les candidats doivent savoir qu'aucun correcteur n'est dupe : les "arnaques" ont été sanctionnées.

Exercice 3

- Un grand nombre de candidats ne connaissent pas les lois discrètes usuelles.
- Une confusion très répandue entre implication directe et implication réciproque : « On sait que, si N suit une loi de Poisson alors $a = 0$, or dans cette question on a $a = 0$, donc N suit une loi de Poisson » !
- Rappelons à un nombre important de candidats que $\binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$, ce qui est bien différent de $\frac{n!}{(k-1)!(n-k-1)!}$.
- Enfin, rappelons que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ n'implique pas que les suites (u_k) et (v_k) sont égales.

Conclusion.

Le niveau global des copies a légèrement baissé et le sujet y est très certainement pour quelque chose.
Malgré cela, le sujet a permis de repérer et de mettre en valeur les candidats les mieux préparés (il y en a de très bons) et les plus aptes à trouver leur place dans des études exigeantes et nécessitant rigueur et honnêteté intellectuelle.
Nous conseillons aux futurs candidats de se préparer d'une façon plus complète, en essayant de ne négliger aucun des points du programme.