Chapitre 2

Nombres complexes

Maths Spé - MP/MP* et PSI/PSI* - Concours 2015

Correction des exercices

Difficulté des exercices

Exercices classiques :

★ - Facile ★★ - Moyen ★★★ - Difficile ★★★★ - Très Difficile

Exercices d'approfondissement :

◆ - Facile ◆◆ - Moyen ◆◆◆ - Difficile ◆◆◆◆ - Très Difficile

Sommaire

Exercices classiques

Exercice 1 - Révisions de Maths Sup ★

1) (a) Idée : Nous allons utiliser l'inégalité triangulaire, en nous efforçant de faire apparaître des différences et non des sommes, et pour faire apparaître $x-y$ dans le membre de droite de l'inégalité triangulaire, nous allons écrire x sous forme $x-y+y$.

> **Rappel de cours**
>
> **Proposition** (Inégalité triangulaire). $\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, |x+y| \leqslant |x| + |y|$.

On a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2,\ |x| = |x-y+y|, \qquad \text{et donc :}$$
$$\leqslant |x-y| + |y|.$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2,\ |x| - |y| \leqslant |x-y|}$$

2) Parties réelle et imaginaire d'un quotient.

(a) Un quotient de nombres complexes n'est pas pratique à manipuler. Pour s'affranchir du nombre complexe au dénominateur, on multiplie numérateur et dénominateur par $\bar{b}$ en ayant à l'esprit que $b\bar{b} = |b|^2$. On a :

$$\frac{a}{b} = \frac{a\bar{b}}{|b|^2}$$

On a maintenant un nombre complexe dont on peut facilement calculer la partie réelle et la partie imaginaire. En effet,

$$\mathrm{Re}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{|b|^2}\,\mathrm{Re}\,(a\bar{b})$$

En notant $a = \mathrm{Re}\,(a) + i\,\mathrm{Im}\,(a)$ et $b = \mathrm{Re}\,(b) + i\,\mathrm{Im}\,(b)$, on obtient finalement :

$$\boxed{\mathrm{Re}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\mathrm{Re}\,(a)\,\mathrm{Re}\,(b) + \mathrm{Im}\,(a)\,\mathrm{Im}\,(b)}{|b|^2}}$$

et de même,

$$\boxed{\mathrm{Im}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\mathrm{Im}\,(a)\,\mathrm{Re}\,(b) - \mathrm{Re}\,(a)\,\mathrm{Im}\,(b)}{|b|^2}}$$

(b) Idée : Comme souvent lorsque l'on a affaire à une somme entre plusieurs exponentielles complexes, on va factoriser par les "exponentielles moitiés" afin de faire apparaître une formule d'Euler.

> **Rappel de cours**
>
> **Proposition** (Formules d'Euler). *On a :* $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$, et : $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$.

Remarquons tout d'abord que comme $\beta \notin \{(2k+1)\pi\,, k \in \mathbb{Z}\}$, alors : $1 + e^{ib} \neq 1$. Ainsi, le quotient $\dfrac{1+e^{i\alpha}}{1+e^{i\beta}}$ est bien défini, et on a :

$$\frac{1+e^{i\alpha}}{1+e^{i\beta}} = \frac{e^{i\frac{\alpha}{2}}}{e^{i\frac{\beta}{2}}} \times \frac{e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{e^{i\beta/2} + e^{-i\frac{\beta}{2}}}.$$

En reconnaissant une formule d'Euler, puis en simplifiant les exponentielles, on en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{1+e^{i\alpha}}{1+e^{i\beta}} &= e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \times \frac{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2\cos\dfrac{\beta}{2}}, \\ &= e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \times \frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\beta}{2}}.\end{aligned}$$

soit :

En passant à la partie réelle, qui est un opérateur $\mathbb{R}$-linéaire, on obtient :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1+e^{i\alpha}}{1+e^{i\beta}}\right) = \frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\beta}{2}}.$$

Or, d'après une formule de trigonométrie usuelle :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right].$$

Point méthode

Les formules de trigonométrie donnant les valeurs de $\cos a \cdot \cos b$, $\cos a \cdot \sin b$ etc peuvent se retrouver facilement à l'aide des formules d'addition et de soustraction connues donnant les valeurs de $\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$, $\sin(a+b)$, etc. Il suffit pour cela d'additionner ou de soustraire certaines d'entre elles pour faire apparaître les quantités souhaitées.

On en déduit :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1+e^{i\alpha}}{1+e^{i\beta}}\right) = \frac{\cos\left(\dfrac{2\alpha-\beta}{2}\right) + \cos\left(-\dfrac{\beta}{2}\right)}{2\ \cos\dfrac{\beta}{2}},$$

soit, la fonction *cos* étant paire :

$$\boxed{\mathrm{Re}\left(\frac{1+e^{i\alpha}}{1+e^{i\beta}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\cos\left(\dfrac{2\alpha-\beta}{2}\right)}{2\ \cos\dfrac{\beta}{2}}}$$

De même, l'opérateur Im étant également $\mathbb{R}$-linéaire :

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1+e^{i\alpha}}{1+e^{i\beta}}\right) = \frac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}}{2\ \cos\dfrac{\beta}{2}}.$$

Or, d'après une formule de trigonométrie usuelle :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \sin(x) \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \cos(x-y)\right].$$

<u>Conclusion</u> :

$$\boxed{\mathrm{Im}\left(\frac{1+e^{i\alpha}}{1+e^{i\beta}}\right) = \frac{\sin\left(\dfrac{2\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\dfrac{\beta}{2}\right)}{2\ \cos\dfrac{\beta}{2}}}$$

Exercice 2 - Quelques calculs de sommes ★★

1) (a) Commençons par remarquer que :

$$\begin{aligned} D_n(\theta) &= e^{-in\theta}\sum_{k=0}^{2n} e^{ik\theta} \\ &= e^{-in\theta}\sum_{k=0}^{2n}\left(e^{i\theta}\right)^k \end{aligned}$$

et $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\left(e^{i\theta}\right)^k$ est la somme des $2n+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $e^{i\theta}$.
On peut utiliser le rappel suivant :

Rappel de cours

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $z \in \mathbb{C}$. Notons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme a et de raison z. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = az^n$$

Soient p et q deux entiers naturels tels que $p < q$. On retiendra que :

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = \sum_{k=p}^{q} az^k = \begin{cases} az^p\left(\dfrac{1-z^{q-p+1}}{1-z}\right) & \text{si } z \neq 1 \\ (q-p+1)\,a & \text{si } z = 1 \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans le cas où $a = 1$ et $p = 0$, $q = n$, on retrouve :

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z} & \text{si } z \neq 1 \\ (n+1) & \text{si } z = 1 \end{cases}$$

Il s'agit d'une formule très utile que l'on peut retenir comme une chanson :

$$\text{premier terme} \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{2n}(e^{i\theta})^k = \begin{cases} \dfrac{1-e^{i(2n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} & \text{si } \theta \neq 2\pi\mathbb{Z} \\ 2n+1 & \text{si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

Supposons que $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Alors, en factorisant par « l'argument moitié », on a :

$$\begin{aligned} \frac{1-e^{i(2n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} &= \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}\left(e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}-e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right)} \\ &= e^{in\theta}\frac{-2i\sin\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\theta\right)}{-2i\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)} \qquad \text{grâce aux formules d'Euler.} \\ &= e^{in\theta}\frac{\sin\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\theta\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

Comme $D_n(\theta) = e^{-in\theta}\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\left(e^{i\theta}\right)^k$, on obtient finalement :

$$\boxed{\forall \theta \notin 2\pi Z,\ D_n(\theta) = \frac{\sin\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\theta\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}}$$

(b) Au cours de cette question, on utilisera plusieurs fois le rappel suivant :

Rappel de cours

On rappelle les formules de trigonométrie suivantes : pour tous $(p,q) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\sin(p)\sin(q) = \frac{1}{2}\left(\cos(p-q) - \cos(p+q)\right) \tag{$\star$}$$

et

$$\begin{aligned}\cos(2p) &= 2\cos^2(p) - 1\\ &= 1 - 2\sin^2(p)\end{aligned}$$

Il ne faut pas tant connaître $(\star)$ par cœur que savoir la retrouver rapidement. Pour cela, il faut être capable de retrouver rapidement les *formules de duplication* $\cos(p+q)$ et $\sin(p+q)$. Pour $\cos(p+q)$, il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned}\cos(p+q) &= \mathrm{Re}\left(e^{i(p+q)}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(e^{ip}e^{iq}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, en développant $e^{ip}e^{iq} = (\cos(p) + i\sin(p))(\cos(q) + i\sin(q))$ et en identifiant la partie réelle, on obtient la formule souhaitée :

$$\cos(p+q) = \cos(p)\cos(q) - \sin(p)\sin(q)$$

On en déduit $\cos(p-q)$ en remplaçant q par $-q$ dans la formule précédente et en utilisant l'imparité de la fonction *sinus*. On retrouve alors rapidement $(\star)$.

Soit $\theta \notin 2\pi Z$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}(n+1)F_n(\theta) &= \sum_{k=0}^{n} D_k(\theta)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\\ &= \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) && \text{car } \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0.\end{aligned}$$

En utilisant $(\star)$ du rappel de cours ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}\left(\cos(k\theta) - \cos((k+1)\theta)\right)\\ &= \frac{1}{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\left(1 - \cos((n+1)\theta)\right) && \text{par télescopage.}\end{aligned}$$

Grâce au rappel de cours ci-dessus, on peut également affirmer que :

$$1 - \cos((n+1)\theta) = 2\sin^2\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)$$

Ce qui donne finalement :

$$(n+1)F_n(\theta) = \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall \theta \notin 2\pi\mathbb{Z},\ F_n(\theta) = \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$$

(c) Par définition de $F_n(\theta)$, on a :

$$\begin{aligned} F_n(\theta) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(\theta) \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=-k}^{k} e^{ip\theta} \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{-q\leqslant p\leqslant q\\ q=k}} e^{ip\theta} \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{(q,p)\in\Delta_k} e^{ip\theta} \end{aligned}$$

où, pour tout $k\in\{0,\dots,n\}$, $\Delta_k=\{(k,p),\ -k\leqslant p\leqslant k\}$. Posons alors :

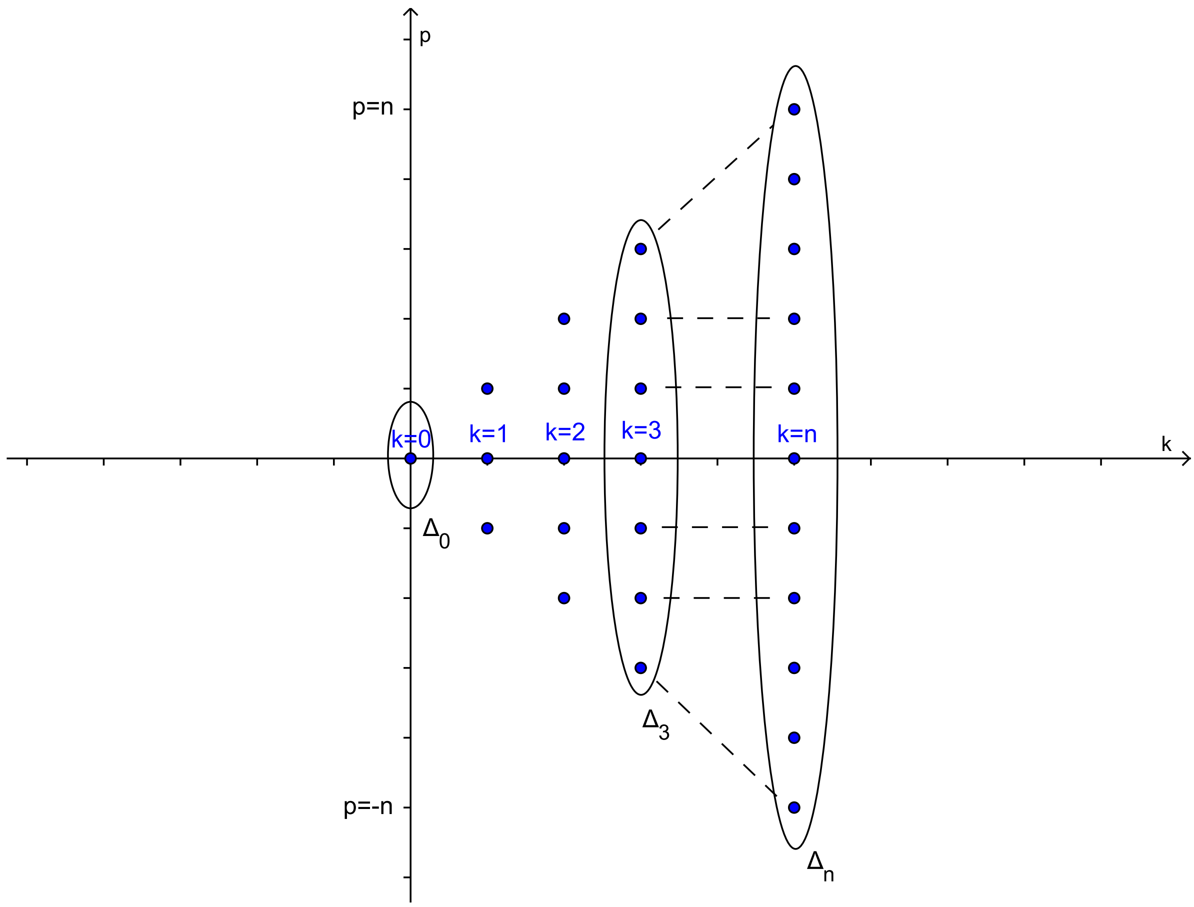
$$\Delta=\bigcup_{k=0}^{n}\Delta_k$$

Δ est une réunion disjointe de « paquets verticaux ». Comme cette réunion est disjointe, on peut écrire :

$$F_n(\theta)=\frac{1}{n+1}\sum_{(k,p)\in\Delta} e^{ip\theta}$$

Idée : pour obtenir l'expression souhaitée de $F_n(\theta)$, on va écrire Δ comme réunion de « paquets horizontaux » (disjointes). Cela revient à intervertir l'ordre des indices de sommation dans $F_n(\theta)$.

Commençons par dessiner ce sous-ensemble Δ de $\mathbb{N}^2$:



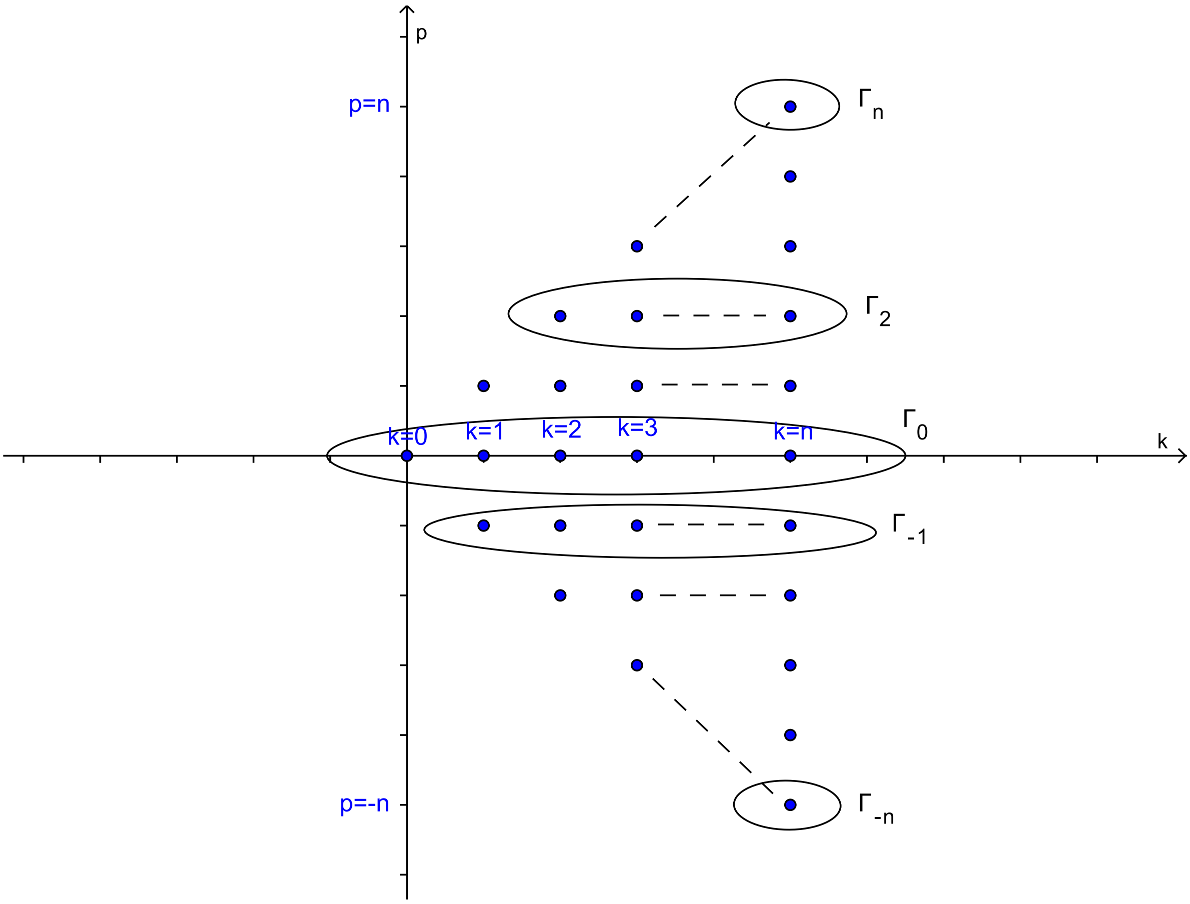
$\Delta\subset\mathbb{N}^2$

Sur le graphique suivant, nous voyons comment construire les « paquets horizontaux » : pour tout $p \in \{-n, \dots, n\}$, posons :

$$\Gamma_p = \{(k,p),\ |p| \leqslant k \leqslant n\}$$

et les « paquets » Γ_p vérifient :

$$\Delta = \bigcup_{p=-n}^{n} \Gamma_p$$



$$\Delta \subset \mathbb{N}^2$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
F_n(\theta) &= \frac{1}{n+1} \sum_{(k,p)\in\Delta} e^{ip\theta} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{p=-n}^{n} \sum_{(k,q)\in\Gamma_p} e^{iq\theta} && \text{car } \bigcup_{p=-n}^{n} \Gamma_p = \Delta \text{ est \underline{disjointe}.} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{p=-n}^{n} \sum_{\substack{|p|\leqslant k\leqslant n \\ q=p}}^{e} {}^{iq\theta} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{p=-n}^{n} \sum_{|p|\leqslant k\leqslant n} e^{ip\theta} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{p=-n}^{n} (n-|p|+1) e^{ip\theta} && \text{car } e^{ip\theta} \text{ ne dépend pas de } k.
\end{aligned}$$

<u>Conclusion</u> :

$$\boxed{\forall \theta \notin 2\pi\mathbb{Z},\ F_n(\theta) = \sum_{p=-n}^{n} \left(1 - \frac{|p|}{n+1}\right) e^{ip\theta}}$$

2) (a) Commençons par remarquer que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(ak+b) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(ak+b)}\right)$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(ak+b)} &= e^{ib} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{ia}\right)^k \\ &= e^{ib}\left(1+e^{ia}\right)^n \qquad \text{grâce à la formule du binôme de Newton.}\end{aligned}$$

Et en factorisant par $e^{i\frac{a}{2}}$, on obtient :

$$1 + e^{ia} = 2\cos\left(\frac{a}{2}\right) e^{i\frac{a}{2}}$$

En utilisant cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(ak+b)} &= e^{ib} 2^n \cos^n\left(\frac{a}{2}\right) e^{i\frac{na}{2}} \\ &= 2^n \cos^n\left(\frac{a}{2}\right) e^{i\left(\frac{na}{2}+b\right)}\end{aligned}$$

En passant à la partie réelle, on obtient finalement :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(ak+b) = 2^n \cos^n\left(\frac{a}{2}\right) \cos\left(\frac{na}{2}+b\right)}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Remarquons que :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^k\right)$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^k &= \left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)} - 1\right)^n \qquad \text{grâce au binôme de Newton.} \\ &= (i\tan(x))^n \qquad \text{car } \cos(x) \neq 0. \\ &= e^{i\frac{n\pi}{2}} \tan^n(x)\end{aligned}$$

En passant à la partie réelle, on obtient finalement :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \tan^n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p+1,\ p \in \mathbb{N} \\ (-1)^p \tan^{2p}(x) & \text{si } n = 2p,\ p \in \mathbb{N}\end{cases}}$$

Exercice 3 - Factorisation dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ ★★★

1) Pour factoriser le polynôme $X^{2n} - 1$ dans $\mathbb{C}$, commençons par déterminer ses racines dans $\mathbb{C}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Résolvons l'équation $z^{2n} - 1 = 0$. Pour cela, on peut utiliser le rappel de cours suivant :

Rappel de cours

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que les solutions *complexes* de l'équation $z^n = 1$ sont :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in [\![0\,,\, n-1]\!] \right\}$$

On rappelle également que $(\mathbb{U}_n, \times)$ forme un groupe appelé *groupe des racines n-ièmes de l'unité*. Le groupe $\mathbb{U}_n$ est cyclique (c'est-à-dire *monogène* et *fini*), engendré par les éléments de la forme $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ où k et n sont premiers entre eux. $\mathbb{U}_n$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ via l'isomorphisme de groupes :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) & \longrightarrow & (\mathbb{U}_n, \times) \\ \overline{k} & \longmapsto & e^{\frac{2ik\pi}{n}} \end{array} \right.$$

Il s'agit en réalité d'un résultat plus général car on peut en effet montrer que tout groupe cyclique d'ordre n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Ici, les solutions de l'équation $z^{2n} = 1$ sont :

$$\left\{ e^{\frac{ik\pi}{n}},\ k \in [\![0\,,\, 2n-1]\!] \right\}$$

On peut donc affirmer que, sur $\mathbb{C}$, on a :

$$\boxed{X^{2n} - 1 = \prod_{k=0}^{2n-1} \left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}} \right)}$$

Il faut se souvenir que :

Rappel de cours

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Factoriser P revient à écrire le polynôme comme produit de polynômes *irréductibles*. Il faut se rappeler de quelle forme sont les polynômes irréductibles.

— Sur $\mathbb{C}$: les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

— Sur $\mathbb{R}$: les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 qui n'ont pas de racines réelles. C'est-à-dire les polynômes de la forme $aX^2 + bX + c$ tels que $b^2 - 4ac < 0$.

Pour factoriser le polynôme $X^{2n} - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$, il faut donc l'écrire comme produit de polynômes de degré 1 ou de polynômes de degré 2 sans racines réelles. Pour cela, on va regrouper astucieusement les racines complexes du polynôme. Détaillons le résultat obtenu précédemment :

$$X^{2n} - 1 = \underbrace{(X-1)}_{k=0} \underbrace{\left(X - e^{\frac{i\pi}{n}} \right)}_{k=1} \dots \left(X - e^{\frac{i(n-1)\pi}{n}} \right) \underbrace{(X+1)}_{k=n} \left(X - e^{\frac{i(n+1)\pi}{n}} \right) \dots \underbrace{\left(X - e^{\frac{i(2n-1)\pi}{n}} \right)}_{k=2n-1}$$

De plus, on peut remarquer que :

$$\forall k \in [\![0\,,\, 2n-1]\!],\ \overline{e^{\frac{ik\pi}{n}}} = e^{\frac{i(2n-k)\pi}{n}} \tag{$\star$}$$

La relation $(\star)$ nous permet de regrouper une racine complexe non réelle avec son conjugué (voir illustration ci-dessous). En effet, on aura :

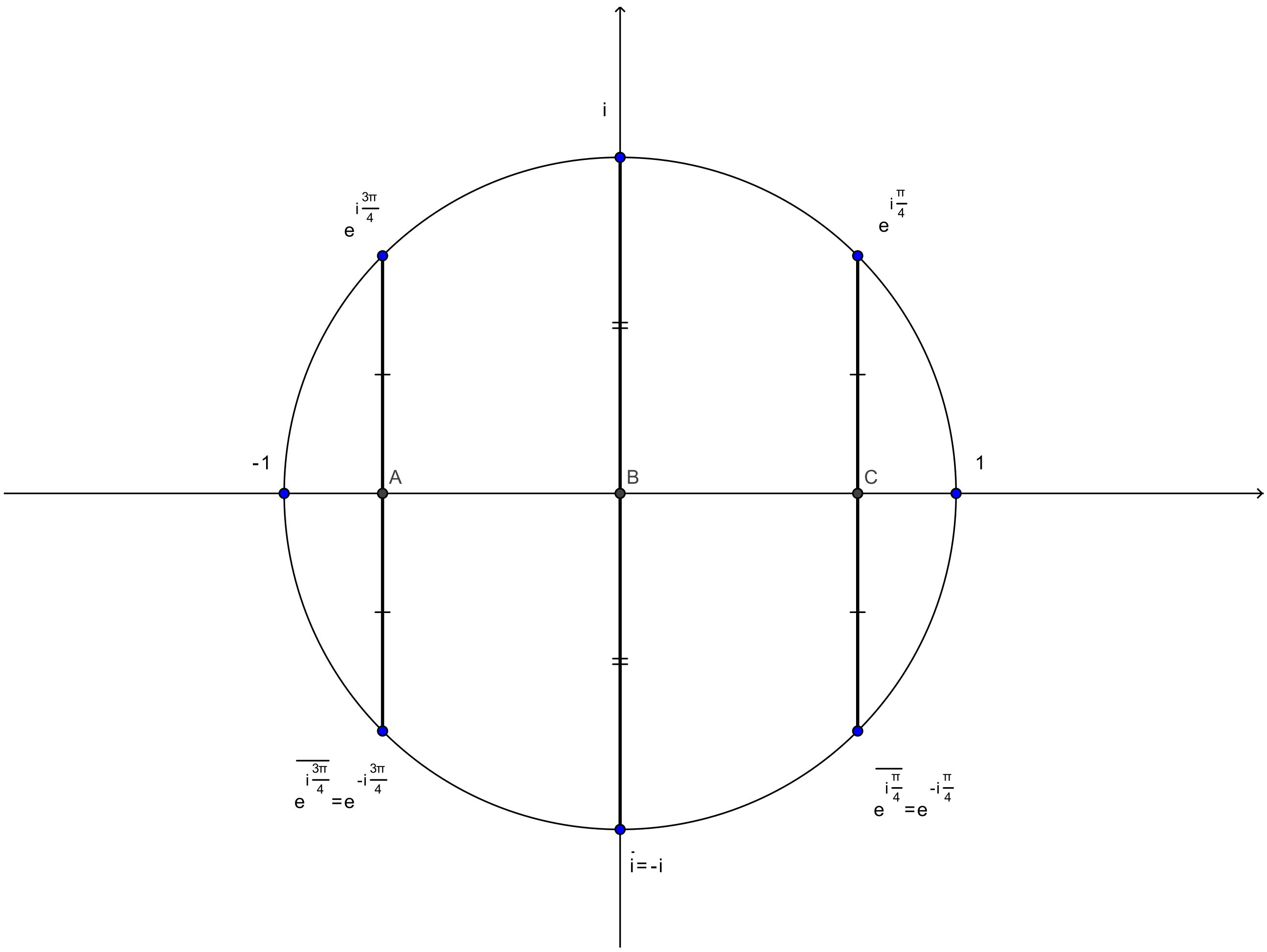
$$\begin{aligned} X^{2n} - 1 &= (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}} \right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{\frac{i(2n-k)\pi}{n}} \right) \\ &= (X-1)(X+1) \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}} \right) \left(X - \overline{e^{\frac{ik\pi}{n}}} \right) \end{aligned}$$

Et sachant que, pour tout $k \in [\![1\,,\, n-1]\!]$, on a :

$$\left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}} \right) \left(X - \overline{e^{\frac{ik\pi}{n}}} \right) = X^2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n} \right) X + 1$$

On obtient finalement :

$$\boxed{X^{2n}-1=(X-1)(X+1)\prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)X+1\right)}$$



Cas $n=4$: racines complexes et leurs conjugués.

2) D'après la question précédente, on sait que :

$$r^{2n}-1=(r^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-2r\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+r^2\right) \qquad (①)$$

Comme $r\in\,]\,1\,,+\infty\,[$, $r^2-1>0$ et pour tout $k\in[\![\,1\,,\,n-1\,]\!]$, on a :

$$1-2r\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+r^2=\left|r-e^{i\frac{k\pi}{n}}\right|^2>0$$

Ainsi, en passant au logarithme dans ①, on obtient :

$$\ln\left(\frac{r^{2n}-1}{r^2-1}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1-2r\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+r^2\right)$$

<u>Conclusion</u> :

$$\boxed{\text{Pour tout } r\in\,]\,1\,,+\infty\,[\,,\ \sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1-2r\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+r^2\right)=\ln\left(\frac{r^{2n}-1}{r^2-1}\right).}$$

3) On peut utiliser le rappel de cours suivant :

Rappel de cours

Théorème (Sommes de Riemann)**.** *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue. Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. Définissons la somme de Riemann* $S(f, \sigma_n)$ *associée à* f *et à la subdivision équirépartie* $\sigma_n = \left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ *par :*

$$S(f, \sigma_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Alors la suite $(S(f, \sigma_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ *converge vers* $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$.

Ici, la fonction $f\colon [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \ln(1 - 2r\cos(t) + r^2)$ est continue sur $[0, \pi]$ comme composée de fonctions continue. Le rappel de cours précédent permet d'affirmer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - 2r\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + r^2\right) = \int_0^\pi \ln\left(1 - 2r\cos(t) + r^2\right)\ \mathrm{d}t$$

Ainsi, en utilisant le résultat de la question précédente, on est ramenés à calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\pi}{n} \ln\left(\frac{r^{2n} - 1}{r^2 - 1}\right)$$

Pour cela, on écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{n} \ln\left(\frac{r^{2n} - 1}{r^2 - 1}\right) &= \frac{\pi}{n} \ln\left(r^{2n} \frac{1 - r^{-2n}}{r^2 - 1}\right) \\
&= \frac{\pi}{n}\left(2n\ln(r) + \ln\left(\frac{1 - r^{-2n}}{r^2 - 1}\right)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\pi}{n} \ln\left(\frac{r^{2n} - 1}{r^2 - 1}\right) = 2\pi\ln(r)$$

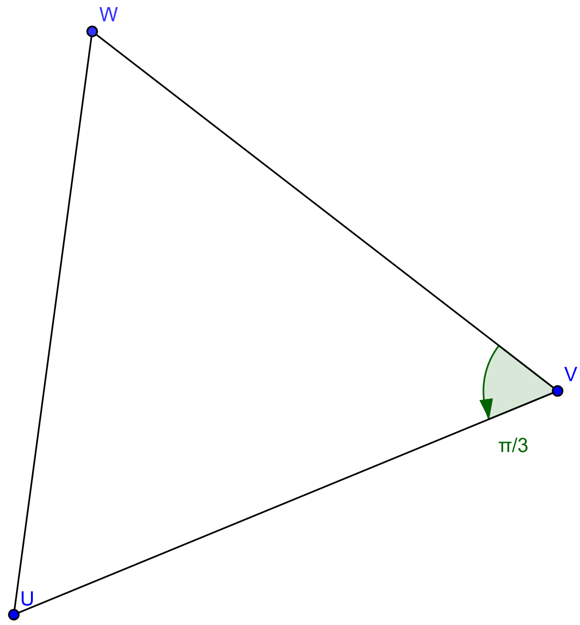
Par unicité de la limite, on a finalement :

$$\boxed{\text{Pour tout } r \in\,]1, +\infty[,\ \int_0^\pi \ln\left(1 - 2r\cos(t) + r^2\right)\ \mathrm{d}t = 2\pi\ln(r).}$$

Exercice 4 - Un peu de géométrie : le théorème de Napoléon ★★

1) Montrons le sens direct puis le sens réciproque.

— $\underline{\Rightarrow}$: Si le triangle UVW est équilatéral direct, alors on peut affirmer que le point U est l'image de W par la rotation de centre V et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. (Voir illustration ci-dessous)



Triangle équilatéral direct UVW

On peut alors utiliser le rappel de cours suivant :

Rappel de cours

Soit Ω un point du plan d'affixe ω et $\theta \in \mathbb{R}$. On définit la *rotation de centre* $\Omega(\omega)$ *et d'angle* θ, notée $R_{\Omega,\theta}$ par :

Pour tout point M du plan d'affixe z, $R_{\Omega,\theta}(M) = M'$ où M' est le point du plan d'affixe z' tel que :

$$(z' - \omega) = e^{i\theta}(z - \omega)$$

On a donc :

$$u - v = e^{i\frac{\pi}{3}}(w - v)$$

Le lecteur pourra se convaincre facilement que $e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2$. On obtient alors :

$$u - v = -j^2(w - v)$$

— $\underline{\Leftarrow}$: Réciproquement, supposons que $u - v = e^{i\frac{\pi}{3}}(w - v)$. Alors U est l'image de W par la rotation de centre V et d'angle $\frac{\pi}{3}$ donc le triangle UVW est équilatéral direct.

<u>Conclusion</u> :

$$\boxed{\text{Le triangle } UVW \text{ est équilatéral direct si et seulement si } u - v = -j^2(w - v).}$$

2) Montrons le sens direct puis le sens réciproque.

— $\underline{\Rightarrow}$: Supposons que le triangle UVW est équilatéral direct. D'après la question précédente, on a : $u - v = -j^2(w - v)$. Ce qui donne :

$$u + (-1 - j^2)v + j^2 w = 0$$

Or, on sait que $1 + j + j^2 = 0$ donc on obtient :

$$u + jv + j^2 w = 0$$

Remarque

Comment faire pour montrer que $1+j+j^2=0$?

Nous allons prouver un résultat plus général. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

Proposition. *Tout nombre complexe z différent de 1 vérifiant $z^n = 1$ est racine du polynôme $1+X+\ldots+X^{n-1}$.*

Cela signifie que si z est une racine n-ième de l'unité différente de 1, alors : $1+z+\ldots+z^{n-1}=0$. Ce résultat se prouve facilement en remarquant que :

$$(X-1)\left(\sum_{j=0}^{n-1} X^j\right) = X^n - 1$$

Dans le cas où $n=3$, la proposition appliquée à $z=j$ donne bien : $1+j+j^2=0$.

— $\underline{\Leftarrow}$: Réciproquement, supposons que $u+jv+j^2w=0$. Alors on montre que : $u-v=-j^2(w-v)$ et d'après la question **1)**, il s'en suit que le triangle UVW est équilatéral direct.

<u>Conclusion</u> :

$$\boxed{\text{Le triangle } UVW \text{ est équilatéral direct si et seulement si } u+jv+j^2w=0.}$$

3) Dans ce genre d'exercice, il est très fortement recommandé de faire un dessin. Cela aide à se faire une idée de la réponse à la question posée.

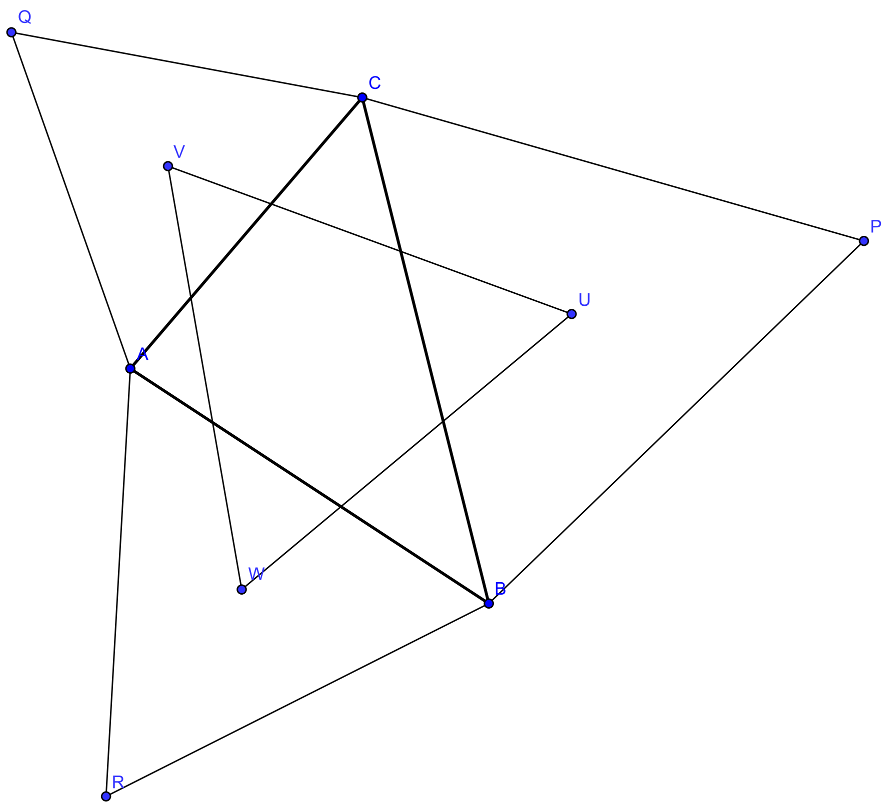


Illustration du théorème de Napoléon.

4) On rappelle que pour un triangle équilatéral, alors *hauteur*, *médiane* et *bissectrices* issues d'un sommet et *médiatrice* du côté opposé à ce sommet sont confondues. Comme on a $WB = WA$ et $\widehat{BWA} = \dfrac{2\pi}{3}$, on en déduit que :

$$(a - w) = j(b - w) \tag{①}$$

On en déduit de même que :

$$(b - u) = j(c - u) \tag{②}$$

et

$$(c - v) = j(a - v) \tag{③}$$

Des relations ① à ③, on tire :

$$w = \frac{a - jb}{1 - j} \quad \text{et :} \quad u = \frac{b - jc}{1 - j} \quad \text{et :} \quad v = \frac{c - ja}{1 - j}$$

Ce qui nous donne :

$$u + jv + j^2 w = \frac{b - jc + jc - j^2 a + j^2 a - b}{1 - j} = 0$$

D'après la question **2)**, on peut affirmer que :

$$\boxed{\text{Le triangle } UVW \text{ est équilatéral direct.}}$$

Par ailleurs, les relations ① à ③ donnent :

$$a + b + c - (u + v + w) = j\left(a + b + c - (u + v + w)\right)$$

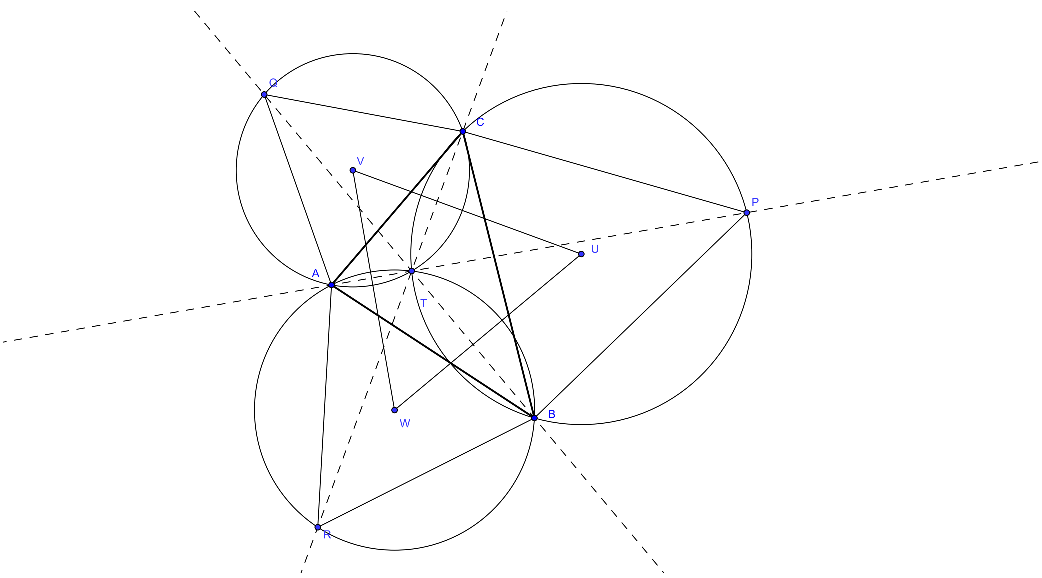
Ce qui donne :

$$a + b + c = u + v + w$$

En utilisant la correspondance entre affixe (dans le plan complexe) et vecteur (dans le plan euclidien), on peut affirmer que l'isobarycentre des points A, B et C (ici, le point d'affixe $a + b + c$) est égal à l'isobarycentre des points U, V et W (ici, le point d'affixe $u + v + w$). On en déduit donc que :

$$\boxed{\text{Les triangles } UVW \text{ et } ABC \text{ ont le même centre de gravité.}}$$

Pour aller plus loin, on pourrait aussi montrer que les droites (AP), (CR) et (BQ) sont concourantes en un point T appelé *point de Torricelli*. C'est le point de concours des cercles circonscrits aux triangles ABR, ACQ et BCP. C'est aussi le point qui rend minimale la distance $f(M) = MA + MB + MC$ lorsque les angles du triangle ABC sont inférieurs à 120.



Point de Torricelli : point de concours des cercles circonscrits aux triangles ABR, ACQ et BCP.

Exercices d'approfondissement

Exercice 5 - Deux cas d'égalité ◆◆

1) Partons de l'égalité $|w_1 + \ldots + w_n| = |w_1| + \ldots + |w_n|$. On peut réécrire cette égalité de la manière suivante (qui est plus condensée) :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} w_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |w_k|$$

> **Point méthode**
>
> Lorsqu'on travaille avec les nombres complexes, il faut garder à l'esprit qu'il est souvent plus facile de travailler avec *le carré* du module d'un nombre complexe. En effet, on peut (et il faut) penser à utiliser l'identité :
>
> $$\forall z \in \mathbb{C},\ |z|^2 = \overline{z}z = z\overline{z}$$

En élevant l'égalité au carré, On obtient :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} w_k\right|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|\right)^2 \qquad (①)$$

Pour développer le terme de gauche, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} w_k\right|^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} w_k\right)\overline{\left(\sum_{k=1}^{n} w_k\right)} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \overline{w_j}\right) && \text{car l'application } z \mapsto \overline{z} \text{ est } \mathbb{R}\text{-linéaire.} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} w_i\overline{w_j}
\end{aligned}$$

Simplifions un peu l'expression $\sum\limits_{i,j=1}^{n} w_i\overline{w_j}$. On peut commencer par distinguer si les indices de sommation i et j sont égaux ou non :

$$\sum_{i,j=1}^{n} w_i\overline{w_j} = \sum_{i=1}^{n} |w_i|^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} w_i\overline{w_j}$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} w_i\overline{w_j} &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} w_i\overline{w_j} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{n} w_i\overline{w_j} \\
&= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} w_i\overline{w_j} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \overline{w_i}w_j \\
&= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \left(w_i\overline{w_j} + \overline{w_i}w_j\right) \\
&= 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \operatorname{Re}\left(w_i\overline{w_j}\right) && \text{car } \forall z \in \mathbb{C},\ z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z).
\end{aligned}$$

Cela permet d'affirmer que le terme de gauche de ① est égal à :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} w_k\right|^2 = \sum_{k=1}^{n} |w_k|^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \operatorname{Re}\left(w_i\overline{w_j}\right)$$

Pour développer le terme de droite de ①, on peut utiliser le rappel suivant :

Rappel de cours

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $(a_1, \ldots, a_n)$ sont n nombres réels, alors on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} a_i a_j$$

Ici, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} |w_k|^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} |w_i||w_j|$$

En injectant ces résultat dans l'équation ①, on en déduit que :

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} |w_i||w_j| - \mathrm{Re}\,(w_i \overline{w_j}) = 0 \qquad (②)$$

Pour conclure cette question, il suffit de remarquer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $\mathrm{Re}\,(z) \leqslant |z|$ (et $\mathrm{Im}\,(z) \leqslant |z|$ également). Ce résultat appliqué avec $z = w_i \overline{w_j}$ donne :

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2,\ i < j,\ |w_i||w_j| - \mathrm{Re}\,(w_i \overline{w_j}) \geqslant 0$$

Remarque

On peut aussi remarquer que cette dernière inégalité est ni plus ni moins que l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* appliquée avec le produit scalaire $(z, z') \in \mathbb{C}^2 \mapsto \mathrm{Re}\,\left(z\overline{z'}\right)$. La norme associée à ce produit scalaire étant $z \mapsto |z|$.

On en déduit finalement que ② est une somme nulle de termes réels positifs. Cela implique que chaque terme de la somme est nul. D'où :

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2,\ i < j,\ \mathrm{Re}\,(w_i \overline{w_j}) = |w_i||w_j|$$

Par symétrie, on obtient finalement :

$$\boxed{\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2,\ i \neq j,\ \mathrm{Re}\,(w_i \overline{w_j}) = |w_i||w_j|}$$

Distinguons ensuite deux cas :

— Si $w_1 = \ldots = w_n = 0$, alors $\theta = 0$ convient.

— Sinon, on peut utiliser le rappel suivant :

Rappel de cours

Il faut se souvenir que tout nombre complexe <u>non nul</u> $z \in \mathbb{C}^*$ s'écrit :

$$z = |z| e^{i\theta}$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$. Un réel θ vérifiant cette égalité est appelé *un argument* de z (il y en a une infinité car si θ est un argument de z, $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ est encore un argument de z). Il est bon de savoir qu'il existe un <u>unique</u> argument de z dans l'intervalle $]-\pi\,, \pi\,]$. On dit que cet argument est *la détermination principale de l'argument* et on le note $\mathrm{Arg}(z)$.

Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $w_k \neq 0$ et notons $\theta_k = \mathrm{Arg}(w_k) \in\,]-\pi\,, \pi\,]$ tel que $w_k = |w_k| e^{i\theta_k}$. Soit $p \in \{1, \ldots, n\}$ avec $k \neq p$. Si $w_p = 0$, on peut toujours écrire $w_p = |w_p| e^{i\theta_k}$. Sinon, notons $\theta_p = \mathrm{Arg}(w_p) \in\,]-\pi\,, \pi\,]$ tel que $w_p = |w_p| e^{i\theta_p}$. Alors,

$$w_k \overline{w_p} = |w_k||w_p| e^{i(\theta_k - \theta_p)}$$

Mais comme $\mathrm{Re}\,(w_k \overline{w_p}) = |w_k||w_p|$, on a :

$$|w_k||w_p| \cos(\theta_k - \theta_p) = |w_k||w_p|$$

Et en simplifiant par $|w_k||w_p| \neq 0$, on obtient :

$$\cos(\theta_k - \theta_p) = 1$$

Cela signifie que $\theta_k - \theta_p = 0 \,(\text{mod } 2\pi)$. Mais par hypothèse (c'est pour cela que l'on a choisi de travailler avec la détermination principale de l'argument), $|\theta_k - \theta_p| < 2\pi$. Cela impose que $\theta_k = \theta_p$. Ceci étant vrai pour k et p deux entiers distincts de $\{1, \ldots, n\}$ quelconques, on en déduit que :

$$\boxed{\text{Il existe un réel } \theta \in \,]-\pi\,,\pi\,] \text{ tel que } \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ w_i = |w_i|e^{i\theta}.}$$

2) $\underline{\Leftarrow}$: Si il existe un unique réel θ tel que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $z_i = |z_i|e^{i\theta}$, le lecteur pourra se convaincre que l'on a bien $A|z| = |Az|$.

$\underline{\Rightarrow}$: Commençons par la remarque suivante :

Remarque

L'énoncé affirme que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, le vecteur Ax est à coordonnées *strictement positives.*

Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, par définition de la matrice canoniquement associée à une application linéaire, le vecteur Ae_i est égal à la i-ème colonne de A. On peut donc affirmer que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$Ae_i = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{n,i} \end{pmatrix}$$

est à coordonnées strictement positives. Finalement, tous les coefficients de la matrice A sont strictement positifs. On va utiliser ce résultat dans la suite.

Supposons que $A|z| = |Az|$. Matriciellement, cette relation s'écrit :

$$A \begin{pmatrix} |z_1| \\ \vdots \\ |z_n| \end{pmatrix} = |Az|$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$\begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}|z_j| \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{n,j}|z_j| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left|\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1,j} z_j\right| \\ \vdots \\ \left|\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{n,j} z_j\right| \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}|z_j| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} z_j\right| \tag{③}$$

Fixons $k = 1$ et posons : $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $w_i = a_{1,i} z_i$. Compte tenu de l'équation ③, on peut appliquer le résultat de la question **1)**. Ainsi, il existe un réel $\theta \in \,]-\pi\,,\pi\,]$ te que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ a_{1,i} z_i = a_{1,i}|z_i|e^{i\theta}$$

Mais comme $a_{1,i} > 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on en déduit finalement :

$$\boxed{\text{Il existe } \theta \in \,]-\pi\,,\pi\,] \text{ tel que } \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ z_i = |z_i|e^{i\theta}.}$$

Exercice 6 - Demi-plan de Poincaré ◆◆

1) (a) Commençons par écrire :

$$z\sin(\theta)+\cos(\theta)=(\operatorname{Re}(z)\sin(\theta)+\cos(\theta))+i\operatorname{Im}(z)\sin(\theta)$$

Si $\theta\notin\pi\mathbb{Z}$, alors $\operatorname{Im}(z\sin(\theta)+\cos(\theta))\neq 0$.

Si $\theta\in\pi\mathbb{Z}$, alors $\operatorname{Im}(z\sin(\theta)+\cos(\theta))=0$ mais $\operatorname{Re}(z\sin(\theta)+\cos(\theta))\neq 0$.

Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } \theta\in\mathbb{R}, \text{ la fonction } A_\theta \text{ est bien définie sur } \mathcal{H}.}$$

(b) Il faut se souvenir que :

Point méthode

Un quotient de nombres complexes n'est pas toujours évident à manipuler. Souvent, on préfère multiplier le numérateur du quotient par le conjugué du dénominateur, de sorte à manipuler un nombre complexe (plutôt qu'un quotient de nombres complexes).

Ici, on a :

$$\begin{aligned}A_\theta(z)&=\frac{z\cos(\theta)-\sin(\theta)}{z\sin(\theta)+\cos(\theta)}\\&=\frac{(z\cos(\theta)-\sin(\theta))(\overline{z}\sin(\theta)+\cos(\theta))}{|z\sin(\theta)+\cos(\theta)|^2}\\&=\frac{|z|^2\sin(\theta)\cos(\theta)+\cos^2(\theta)z-\sin^2(\theta)\overline{z}-\sin(\theta)\cos(\theta)}{|z\sin(\theta)+\cos(\theta)|^2}\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(A_\theta(z))&=\operatorname{Im}\left(\frac{\cos^2(\theta)z-\sin^2(\theta)\overline{z}}{|z\sin(\theta)+\cos(\theta)|^2}\right)\\&=\frac{\operatorname{Im}(z)}{|z\sin(\theta)+\cos(\theta)|^2}\qquad\text{car } \operatorname{Im}(\overline{z})=-\operatorname{Im}(z).\end{aligned}$$

Et comme $z\in\mathcal{H}$, on a $\operatorname{Im}(z)>0$, ce qui donne $\operatorname{Im}(A_\theta(z))>0$.

Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } \theta\in\mathbb{R},\ A_\theta \text{ est bien à valeurs dans } \mathcal{H}.}$$

2) (a) Soit $\omega\in\mathcal{H}$. Nous avons :

$$\begin{aligned}A_\theta(z)=\omega&\Leftrightarrow\frac{z\cos(\theta)-\sin(\theta)}{z\sin(\theta)+\cos(\theta)}=\omega\\&\Leftrightarrow\omega\,(z\sin(\theta)+\cos(\theta))=(z\cos(\theta)-\sin(\theta))\\&\Leftrightarrow z\,(\cos(\theta)-\omega\sin(\theta))=\omega\cos(\theta)+\sin(\theta)\\&\Leftrightarrow z=\frac{\omega\cos(\theta)+\sin(\theta)}{\cos(\theta)-\omega\sin(\theta)}\qquad\text{car } \cos(\theta)-\omega\sin(\theta)\neq 0.\end{aligned}$$

D'après la question **1)a)**, pour tout réel θ, $\dfrac{\omega\cos(\theta)+\sin(\theta)}{\cos(\theta)-\omega\sin(\theta)}$ est bien un élément de $\mathcal{H}$. Le raisonnement précédent prouve que ω a au plus un antécédent par A_θ. On en déduit que A_θ est injective. Par ailleurs, le seul antécédent de ω par A_θ ne pouvant être que $\dfrac{\omega\cos(\theta)+\sin(\theta)}{\cos(\theta)-\omega\sin(\theta)}$, on en déduit que A_θ est surjective.

Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } \theta \in \mathbb{R},\ A_\theta \text{ est bijective de } \mathcal{H} \text{ dans } \mathcal{H}.}$$

(b) Montrer que l'application $\theta \in (\mathbb{R},+) \longmapsto A_\theta \in \mathrm{Bij}(\mathcal{H})$ est un morphisme de groupes revient à prouver que :

$$\forall (\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2,\ A_{\theta+\theta'} = A_\theta \circ A_{\theta'}$$

Soit $(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2$. Calculons $A_\theta \circ A_{\theta'}$. Soit $z \in \mathcal{H}$, on a :

$$\begin{aligned}
(A_\theta \circ A_{\theta'})(z) &= A_\theta\left(\frac{z\cos(\theta') - \sin(\theta')}{z\sin(\theta') + \cos(\theta')}\right) \\
&= \frac{\dfrac{z\cos(\theta') - \sin(\theta')}{z\sin(\theta') + \cos(\theta')}\cos(\theta) - \sin(\theta)}{\dfrac{z\cos(\theta') - \sin(\theta')}{z\sin(\theta') + \cos(\theta')}\sin(\theta) + \cos(\theta)} \\
&= \frac{z(\cos(\theta')\cos(\theta) - \sin(\theta')\sin(\theta)) - \sin(\theta')\cos(\theta) - \cos(\theta')\sin(\theta)}{z(\cos(\theta')\sin(\theta) + \sin(\theta')\cos(\theta)) - \sin(\theta')\sin(\theta) + \cos(\theta')\cos(\theta)} \\
&= \frac{z\cos(\theta+\theta') - \sin(\theta+\theta')}{z\sin(\theta+\theta') + \cos(\theta+\theta')} \qquad \text{grâce aux formules de duplication.}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\forall (\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2,\ A_{\theta+\theta'} = A_\theta \circ A_{\theta'}$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{\text{L'application } \theta \in (\mathbb{R},+) \longmapsto A_\theta \in \mathrm{Bij}(\mathcal{H}) \text{ est un morphisme de groupes.}}$$

Remarque

Grâce à la propriété de morphisme de groupe, on a $A_0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$. On en déduit donc que :

$$A_{\theta-\theta} = A_0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} = A_\theta \circ A_{-\theta}$$

Donc $A_{-\theta}$ est l'inverse de l'application A_θ.

3) (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et soit $z \in \mathcal{H}$. On a :

$$\begin{aligned}
|A_\theta(z)|^2 + 1 &= \frac{|z\cos(\theta) - \sin(\theta)|^2}{|z\sin(\theta) + \cos(\theta)|^2} + 1 \\
&= \frac{|z\cos(\theta) - \sin(\theta)|^2 + |z\sin(\theta) + \cos(\theta)|^2}{|z\sin(\theta) + \cos(\theta)|^2}
\end{aligned}$$

En utilisant le rappel de cours suivant :

Rappel de cours

Pour tout couple (z,z') de nombres complexes, on a :

$$|z - z'|^2 = |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(z\overline{z'}) + |z'|^2 \qquad (\star\star)$$

On obtient cette égalité en écrivant $|z-z'|^2 = (z-z')(\overline{z}-\overline{z'})$ puis en développant. Il faudra utiliser l'identité $z+\overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,(z)$. De façon plus savante, l'identité $(\star\star)$ est une *identité de polarisation* pour le produit scalaire $(z,z') \in \mathbb{C}^2 \longmapsto \mathrm{Re}\,(z\overline{z'}) \in \mathbb{R}^+$ dont la forme quadratique associée est $z \in \mathbb{C} \longmapsto |z|^2 \in \mathbb{R}^+$.

on obtient :

$$|A_\theta(z)|^2 + 1 = \frac{|z|^2 + 1}{|z\sin(\theta) + \cos(\theta)|^2}$$

Par ailleurs, on a montré à la question **1)b)** que :

$$\mathrm{Im}\,(A_\theta(z)) = \frac{\mathrm{Im}\,(z)}{|z\sin(\theta)+\cos(\theta)|^2}$$

Donc on a bien :

$$c(A_\theta(z)) = \frac{|A_\theta(z)|^2+1}{2\,\mathrm{Im}\,(A_\theta(z))} = \frac{|z|^2+1}{|z\sin(\theta)+\cos(\theta)|^2} = c(z)$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout réel } \theta,\ c\circ A_\theta = c.}$$

(b) — $\Leftarrow$: Supposons que $\theta-\theta' = k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$. Alors $\theta = \theta'+k\pi$ et, pour $z\in\mathcal{H}$, on a :

$$\begin{aligned} A_\theta(z) &= A_{\theta'+k\pi}(z) \\ &= \frac{z\cos(\theta'+k\pi)-\sin(\theta'+k\pi)}{z\sin(\theta'+k\pi)+\cos(\theta'+k\pi)} \\ &= \frac{(-1)^k z\cos(\theta')-(-1)^k\sin(\theta')}{(-1)^k z\sin(\theta')+(-1)^k\sin(\theta')} \\ &= A_{\theta'}(z) \end{aligned}$$

Donc $A_\theta = A_{\theta'}$.

— $\Rightarrow$: Supposons que $A_\theta(z) = A_{\theta'}(z)$ pour tout $z\in\mathcal{H}\setminus\{i\}$. Alors :

$$\begin{aligned} A_\theta(z) = A_{\theta'}(z) &\Leftrightarrow \frac{z\cos(\theta)-\sin(\theta)}{z\sin(\theta)+\cos(\theta)} = \frac{z\cos(\theta')-\sin(\theta')}{z\sin(\theta')+\cos(\theta')} \\ &\Leftrightarrow (z\cos(\theta)-\sin(\theta))(z\sin(\theta')+\cos(\theta')) = (z\sin(\theta)+\cos(\theta))(z\cos(\theta')-\sin(\theta')) \\ &\Leftrightarrow (z^2+1)\sin(\theta)\cos(\theta') = (z^2+1)\cos(\theta)\sin(\theta') \\ &\Leftrightarrow (z^2+1)\sin(\theta-\theta') = 0 \\ &\Leftrightarrow \theta-\theta'\in\pi\mathbb{Z} \qquad \text{car } z^2+1\neq 0\ (Im(z)>0 \text{ et } z\neq i). \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } z\in\mathcal{H}\setminus\{i\},\ A_\theta(z) = A_{\theta'}(z) \text{ si et seulement si } \theta-\theta'\in\pi\mathbb{Z}.}$$

4) (a) Soit $z_0\in\mathcal{H}\setminus\{i\}$. Montrons que $\mathcal{O}\subset\mathcal{C}_{z_0}$. Soit $z\in\mathcal{O}$. Par définition, il existe un réel θ tel que $z = A_\theta(z_0)$. Nous voulons montrer que :

$$|z-ic(z_0)| = \sqrt{c(z_0)^2-1}$$

Pour cela, écrivons :

$$\begin{aligned} |z-ic(z_0)|^2 &= |z|^2 - 2c(z_0)\,\mathrm{Re}\,(iz) + c(z_0)^2 \\ &= |z|^2 - 2c(z_0)\,\mathrm{Im}\,(z) + c(z_0)^2 \\ &= |z|^2 + 1 - 2c(z_0)\,\mathrm{Im}\,(z) + c(z_0)^2 - 1 \\ &= 2c(z)\,\mathrm{Im}\,(z) - 2c(z_0)\,\mathrm{Im}\,(z) + c(z_0)^2 - 1 \qquad \text{car } c(z) = \frac{|z|^2+1}{2\,\mathrm{Im}\,(z)}. \\ &= (c(z)-c(z_0))\,\mathrm{Im}\,(z) + c(z_0)^2 - 1 \end{aligned}$$

Or, $z = A_\theta(z_0)$ et donc, $c(z) = c(A_\theta(z_0))$. D'après la question **2)a)**, on a : $c = c\circ A_\theta$. D'où : $c(z) = c(z_0)$. On a alors :

$$|z-ic(z_0)|^2 = c(z_0)^2-1$$

Donc $z\in\mathcal{C}_{z_0}$ et on en déduit que :

$$\boxed{\mathcal{O}\subset\mathcal{C}_{z_0}}$$

(b) Considérons un point z du cercle $\mathcal{C}_{z_0}$. Si $z = z_0$, alors $z = A_0(z_0)$ et $z \in \mathcal{O}$. Si $z \neq z_0$, nous allons montrer qu'il existe $\theta \in \,]\,0\,,\pi\,[$ (qui dépend de z) tel que $z = A_\theta(z_0)$. Mais :

$$\begin{aligned} A_\theta(z_0) = z &\Leftrightarrow \frac{z_0\cos(\theta) - \sin(\theta)}{z_0\sin(\theta) + \cos(\theta)} = z \\ &\Leftrightarrow \operatorname{cotan}(\theta) = \frac{1 + z_0 z}{z_0 - z} \qquad \text{car } \sin(\theta) \neq 0. \end{aligned}$$

Or la fonction cotan réalise une bijection de $]\,0\,,\pi\,[$ sur $\mathbb{R}$. Pour pouvoir conclure, il suffit de prouver que le quotient $\dfrac{1 + z_0 z}{z_0 - z}$ est réel quelque soit $z \in \mathcal{C}_{z_0}$ (avec $z \neq z_0$). A la question précédente, nous avons montré que :

$$|z - ic(z_0)|^2 = (c(z) - c(z_0))\,\mathrm{Im}\,(z) + c(z_0)^2 - 1$$

On en déduit l'équivalence suivante :

$$z \in \mathcal{C}_{z_0} \Leftrightarrow c(z) = c(z_0)$$

En effet, si $z \in \mathcal{C}_{z_0}$ (avec $z \neq z_0$), on a : $|z - ic(z_0)|^2 = c(z_0)^2 - 1$. Cela impose $(c(z) - c(z_0))\,\mathrm{Im}\,(z) = 0$. Mais comme $\mathrm{Im}\,(z) > 0$, on a donc : $c(z) = c(z_0)$. Le sens réciproque a été traité à la question précédente. On a donc :

$$\begin{aligned} c(z) = c(z_0) &\Leftrightarrow \frac{|z|^2 + 1}{2\,\mathrm{Im}\,(z)} = \frac{|z_0|^2 + 1}{2\,\mathrm{Im}\,(z_0)} \\ &\Leftrightarrow \frac{|z|^2 + 1}{z - \overline{z}} = \frac{|z_0|^2 + 1}{z_0 - \overline{z_0}} \\ &\Leftrightarrow (|z_0|^2 + 1)(z - \overline{z}) = (z_0 - \overline{z_0})(|z|^2 + 1) \\ &\Leftrightarrow \frac{1 + z_0 z}{z_0 - z} = \frac{1 + \overline{z_0 z}}{\overline{z_0} - \overline{z}} \\ &\Leftrightarrow \frac{1 + z_0 z}{z_0 - z} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On en déduit que $\dfrac{1 + z_0 z}{z_0 - z}$ est réel pour tout $z \in \mathcal{C}_{z_0}$ (avec $z \neq z_0$). On peut donc choisir :

$$\theta = \operatorname{cotan}^{-1}\left(\frac{1 + z_0 z}{z_0 - z}\right)$$

Ce qui prouve que $z = A_\theta(z_0)$ et fournit l'inclusion réciproque $\mathcal{C}_{z_0} \subset \mathcal{O}$.

<u>Conclusion</u> :

$$\boxed{\mathcal{O} = \mathcal{C}_{z_0}}$$