Irrationalité de $\zeta(2)$

Maths SUP - Concours 2015

Notations, définitions et rappels

— Pour toute fonction f et pour tout entier naturel n, $f^{(n)}$ désignera, lorsqu'elle existe, la dérivée n-ème de f. Par convention, $f^{(0)} = f$.

— On rappelle que l'ensemble des nombres *rationnels* est noté $\mathbb{Q}$ et que les rationnels sont de la forme $\dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et où la fraction $\dfrac{p}{q}$ est irréductible (ce qui s'écrit aussi $\operatorname{pgcd}(p, q) = 1$). $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres *irrationnels*.

Objectif du problème, dépendance des parties

— Le but du problème est d'établir une formule permettant de calculer les nombres $\zeta(2p)$, définis pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 2 par :

$$\zeta(p) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}.$$

Le problème propose également une preuve de l'irrationalité du nombre $\zeta(2)$.

— La partie **I** prouve l'existence de la limite définissant $\zeta(p)$ pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 2. La partie **II** propose l'étude de la suite des polynômes de Bernoulli, intervenant dans l'expression des nombres $\zeta(2p)$ $(p \in \mathbb{N}^*)$. Au cours de la partie **III**, on détermine une expression de $\zeta(2p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Enfin, en partie **IV**, on prouve l'irrationalité de $\zeta(2)$.

— Les parties **II**, **III** et **IV** sont indépendantes entre elles.

I. Étude de la convergence de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Dans cette partie, on considère un entier naturel p supérieur ou égal à 2 et on définit la suite $(S_n(p))_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}.$$

1) Étudier la monotonie de la suite $(S_n(p))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2) (a) Montrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1, $\displaystyle\frac{1}{(k+1)^p} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^p}\,dt \leqslant \frac{1}{k^p}$.

(b) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $\displaystyle S_n(p) - 1 \leqslant \int_1^n \frac{1}{t^p}\,dt \leqslant \frac{1}{p-1}$.

(c) Conclure que la suite $(S_n(p))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On notera $\zeta(p)$ sa limite.

II. Polynômes de Bernoulli et nombres de Bernoulli

Dans cette partie, on note $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. On identifie un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ à sa fonction polynomiale associée définie sur $\mathbb{R}$.

1) Soit f une fonction définie et continue sur $[0,1]$, à valeurs réelles. Montrer qu'il existe une unique fonction $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ telle que :

$$F' = f \quad \text{et : } \quad \int_0^1 F(t)\,dt = 0.$$

On appelle *suite de polynômes de* Bernoulli une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

i) $B_0 = 1$,

ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n' = nB_{n-1}$,

iii) $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^1 B_n(t)\,dt = 0$.

2) Montrer que les conditions i), ii) et iii) définissent une *unique* suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$. On l'appellera alors la suite des polynômes de Bernoulli.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $b_n = B_n(0)$. On dit que b_n est le n-ème *nombre de* Bernoulli.

3) Calculer B_1 et B_2. En déduire b_1 et b_2.

4) (a) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, calculer $B_n(1) - B_n(0)$.

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$.

(c) Montrer alors que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $b_{2p+1} = 0$.

5) (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$.

(b) En déduire que la suite des nombres de Bernoulli vérifie : $\forall p \in \mathbb{N},\ p \geqslant 2,\ \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} b_{p-k} = 0$.

(c) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $b_{2p} = \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} b_k$.

(d) En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$, on a :

$$b_{2p} = -\frac{1}{(2p+2)(2p+1)} \sum_{k=0}^{2p-2} \binom{2p+2}{k} b_k.$$

Ces dernières relations permettent de calculer les nombres de Bernoulli par récurrence. Elles permettent également de prouver que les nombres de Bernoulli sont *rationnels*.

III. Calcul de $\zeta(2p)$

1) Pour tout $t \in]0,\pi]$, calculer $\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt)$, puis déterminer une constante réelle λ telle que :

$$\forall t \in]0,\pi],\ \frac{\sin((2n+1)t)}{2\sin(t)} = \sum_{k=1}^{n} \cos(2kt) + \lambda.$$

2) Montrer que pour toute fonction $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} f(t)\sin((2n+1)t)\,dt = 0.$$

Pour tout couple (p,k) d'entiers naturels, on définit $J_{p,k} = \int_0^{\pi} B_{2p}\left(\frac{t}{\pi}\right)\cos(2kt)\,dt$.

3) (a) A l'aide de deux intégrations par parties, calculer $J_{1,k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(b) Pour $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$, trouver une relation entre $J_{p,k}$ et $J_{p-1,k}$.

(c) En déduire l'expression de $J_{p,k}$ en fonction de p et de k pour tout $(p,k) \in \mathbb{N}^2$.

Dans la suite, on considère un entier $p \in \mathbb{N}^*$ fixé et on définit la fonction $\varphi_p : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ par :

$$\varphi_p(0) = 0,\ \varphi_p(\pi) = 0 \text{ et : } \forall t \in]0,\pi[,\ \varphi_p(t) = \frac{B_{2p}(\frac{t}{\pi}) - b_{2p}}{\sin(t)}.$$

Il est **admis** dans la suite du problème que la fonction φ_p est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

4) (a) Donner une expression de $\int_0^{\pi} \varphi_p(t)\sin((2n+1)t)\,dt$ en fonction de n, p et de b_{2p}.

(b) En déduire la valeur de $\zeta(2p)$ en fonction de p et de b_{2p}.

(c) Donner les valeurs de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.

En 1882, Lindemann démontra que π est *transcendant*. C'est-à-dire que π n'est racine d'aucun polynôme (non nul) à coefficients rationnels. Ce résultat a permis de prouver que tous les nombres $\zeta(2n)$ sont irrationnels. Le premier résultat concernant les $\zeta(2n+1)$ n'est arrivé qu'en 1978, lorsque Apéry démontra que $\zeta(3)$ est irrationnel. Il aura fallu plus d'un siècle pour obtenir un résultat concernant l'irrationalité des $\zeta(2n+1)$. Ces nombres restent encore très mystérieux à l'heure actuelle. En 2001, Zuidilin a montré qu'au moins un nombre parmi $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ et $\zeta(11)$ est irrationnel.

IV. Irrationalité de $\zeta(2)$

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul et pour tout x réel, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer qu'il existe $n+1$ entiers $e_n, e_{n+1}, \cdots, e_{2n}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} e_i x^i$.

(b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_n^{(k)}(0)$ est entier.

(c) En remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = f_n(1-x)$, montrer que $f_n^{(k)}(1)$ est entier.

On veut prouver que π^2 est irrationnel. On va raisonner par l'absurde : supposons qu'il existe deux entiers u et v tels que la fraction $\dfrac{u}{v}$ soit irréductible (c'est-à-dire tels que $\operatorname{pgcd}(u,v) = 1$*) tels que* $\pi^2 = \dfrac{u}{v}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction F_n sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = v^n\left(\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)\right).$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(0)$ et $F_n(1)$ sont des entiers.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = F_n'(x)\sin(\pi x) - \pi F_n(x)\cos(\pi x).$$

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g_n'(x) = \pi^2 u^n f_n(x)\sin(\pi x)$.

(c) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \pi u^n \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\sin(\pi x)\,dx$ est un entier.

Dans la suite, on note $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{u^n}{n!}$.

3) (a) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, $w_n < \dfrac{1}{2}$.

(b) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n!}$.

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, $A_n \in]0,1[$, puis que π^2 est irrationnel. Conclure quant à l'irrationalité de $\zeta(2)$.

(d) Peut-on déduire de ce qui précède l'irrationalité de π ?